MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez ROBET, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue Hautefeuille, 10 bis.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

6 m FÉVRIER 1892.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez RORET, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue Hautefeuille, 10 bis.	Carlstrasse, 11.

A BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

FÉVRIER 1892.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XVII.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 1er FÉVRIER 1892.

Bureau.

Président,	M. M. LOHEST.
Vice-Président,	» J. FRAIPONT.
Secrétaire général,	» LE PAIGE.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. DERUYTS.

Membres effectifs.

1842 SELYS LONGCHAMPS (baron E. DE), membre de l'Académie royale de Belgique.

1853 CANDÈZE, E., membre de l'Académie royale de Belgique, à Glain par Liège.

PÂQUE, A., ancien professeur de mathématiques à l'athénée de Liège (Flémalle-Grande).

1855 DEWALQUE, G., professeur à l'université de Liège, membre de l'Académie royale de Belgique.

1856 Catalan, C. E., professeur émérite à l'université, associé de l'Académie royale de Belgique.
1860 Gillon, A., professeur à l'université.
1868 Graindorge, L. A. J., professeur à l'université.
1870 Masius, V., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
Vanlair, C., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.
1875 Swaen, A., professeur à l'université.
1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1879 Jorissen, A., chargé de cours à l'université.
1880 Neuberg, J., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
1881 Fraipont, J., professeur à l'université.
1884 Deruyts, J., chargé de cours à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
Ronkar, Ém., chargé de cours à l'université.
Ubaghs, P., répétiteur à l'École des mines.
1885 Gravis, A., professeur à l'université.
1887 Lohest, M., agrégé spécial à l'université.
Forir, H., répétiteur à l'École des mines.
Deruyts, Fr., docteur en sciences, assistant à l'université.
Lambotte, Er., docteur en médecine, à Verviers.
De Heen, P., chargé de cours à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur au corps des mines.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1842 Laguesse, directeur divisionnaire honoraire des mines, à Tournai.
1845 Maus, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.
1847 De Cuyper, A. C., professeur émérite à l'université de Liège, à Bruxelles.
1852 Ettingshausen (baron Constantin von), membre de l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.
1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.
1854 Petrina, professeur de physique, à Prague (Bohême).
1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.
Tchébycheff, P., membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1858 Caligny (marquis de), correspondant de l'Institut, à Versailles (France).
1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
Terssen, général d'artillerie, à Anvers.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1866 Ledent, professeur au collége communal de Verviers.
1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).
Boncompagni (prince Balthasar), à Rome.
Helmholtz (von), professeur de physique, à Berlin.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.

1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.

1871 Imschenetski, membre de l'Académie, à Saint-Petersbourg.

Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Durége, professeur à l'université de Prague (Bohême).

Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

Le Boulengé, P., colonel d'artillerie.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.

Garibaldi, professeur à l'université de Gênes (Italie).

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).

1873 Bates, H., membre de la Société royale de Londres.

Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.

Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1874 Winkler, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).

Van Rysselberghe, aide à l'Observatoire royal, à Bruxelles.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Sylvester, J. J., professeur à l'université d'Oxford.

Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.

Weyr, Ém., professeur à l'université de Vienne (Autriche).

Ibañez, général, directeur de l'Institut cartographique, à Madrid.

Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.

Van der Mensbrugge, Gustave, professeur à l'université de Gand.

1880 De Tilly, J., colonel, membre de l'Académie de Belgique, à Bruxelles.
Bonnet, Ossian, membre de l'Institut, à Paris.
1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Planté, G., à Paris.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.
Giordano, inspecteur du corps des mines, à Rome.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Laisant, C. A., député, à Paris.
Beltrami, professeur à l'université de Pavie.
1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.
Bouniakowski, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1883 Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.
Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.
Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.
1884 Bierens de Haan, D., professeur à l'université de Leide.
Gerono, C., rédacteur des *Nouvelles Annales de mathématiques,* à Paris.
1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.
Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).
Cesàro, E., professeur à l'université, à Palerme.
1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Menabrea, marquis de Val-Dora, ambassadeur de S. M. le roi d'Italie, à Paris.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.

1887 WÜLLNER, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
PAALZOW, directeur de l'École technique de Berlin.
1888 OCAGNE (Maurice D'), ingénieur des ponts et chaussées, à Cherbourg (France).

II. — Sciences naturelles.

1842 VAN BENEDEN, J. P., professeur à l'université de Louvain.
1843 KEYSERLING (comte A. DE), membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.
1845 HAGEN, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).
1848 KLIPSTEIN (VON), professeur à l'université de Giessen.
1852 DANA, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle, à New-Haven (États-Unis).
1853 WESTWOOD, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).
WATERHOUSE, conservateur au Musée Britannique, à Londres.
1854 KÖLLIKER (VON), professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).
DROUET, H., naturaliste, à Charleville (France).
STAMMER, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).
ERLENMEYER, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).
LUCAS, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
BLANCHARD, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 GEINITZ, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1859 MARSEUL (abbé DE), entomologiste, à Paris.
BEYRICH, professeur à l'université de Berlin.
MARCOU, J., géologue, États-Unis.
1860 DU BOIS-REYMOND, professeur à l'université de Berlin.

1860 Brücke, professeur à l'université de Vienne.
1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Königsberg (Prusse).
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.
Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg (France).
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.
1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.
1870 Trautschold, professeur, à Breslau.
Malaise, C., professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.
1871 Van Hooren, docteur en sciences, à Tongres.
Müller (baron von), botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).
Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.
Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.
1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.
Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

1873 Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

Glaziou, botaniste, directeur des Jardins impériaux à Rio de Janeiro.

Ladislaõ Netto, botaniste, directeur du Musée de Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Burmeister, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède.)

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

Huxley, professeur à l'école des mines, à Londres.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem (États-Unis).

Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

Römer, F., professeur à l'université de Breslau.

Saporta (Gaston marquis de), correspondant de l'Institut de France, à Aix (France).

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

1879 Bolivar, I., professeur, à Madrid.
Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
Renard, Alphonse, professeur à l'université de Gand.
1881 Key, Axel, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Retzius, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Meneghini, professeur à l'université de Pise.
Taramelli, professeur à l'université de Pavie.
Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
Sandberger, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liège. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeur : P. MANSION, professeur à l'université.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche Geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Paris. — *Société géologique de France.*
Société Philomatique.
Muséum d'histoire naturelle.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Istituto tecnico.*
Societa di scienze naturali e economiche.
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*

Rome. — *Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche,* publié par le prince B. Boncompagni.
Reale Accademia dei Lincei.
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*

Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

Delft. — *École polytechnique.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques*, rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*

Société d'archéologie et de numismatique.

Société entomologique.

Société impériale de minéralogie.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*

Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.

Entomologiska föreningen, 94. Drottninggatan.

Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik* : Dr H. G. Zeuthen, professeur à l'université.
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schafhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Baltimore. — *American Journal of mathematics.* (*Johns Hopkins University.*)

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge. — *Museum of comparative zoology.*

Columbus. — *Ohio State agricultural Society.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

Newport. — *Orleans County Society of natural sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Salem. — *The American Naturalist.*
Essex Institute.
Peabody Academy of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

CANADA.

Ottawa. — *Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.*

Toronto. — *Canadian Institute.*

Montréal. — *Geological Survey of Canada.*

GUATÉMALA.

Guatémala. — *Sociedad economica.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

SUR

LA CORRÉLATION POLAIRE INVOLUTIVE

DANS UN ESPACE LINÉAIRE QUELCONQUE;

PAR

François DERUYTS,

ASSISTANT A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

SUR

LA CORRÉLATION POLAIRE INVOLUTIVE

DANS UN ESPACE LINÉAIRE QUELCONQUE (*).

I. — Représentons par x_i et par ξ_i, i variant de 1 à $n+1$, les coordonnées homogènes d'un point X et d'un espace Ξ à $n-1$ dimensions, situés dans un espace à n dimensions. Les éléments de cet espace sont rapportés à un polyèdre fondamental à $n+1$ faces, qui sont des espaces à $n-1$ dimensions.

Considérons une forme bilinéaire symétrique gauche à $n+1$ variables, que nous représenterons symboliquement par

$$f \equiv a_x a'_y$$

avec les conditions,

$$a_i a'_k \equiv - a_k a'_i \quad \text{ou} \quad a_{ik} = - a_{ki}, \quad a_{ii} = 0,$$

i et k variant de 1 à $n+1$.

Cette forme, égalée à zéro, définit dans l'espace considéré une *corrélation polaire involutive* que nous nous proposons d'étudier dans ses traits principaux.

Si nous supposons les x_i constants, l'équation $f=0$ établit une relation linéaire entre des coordonnées y_i de points de l'espace à n dimensions : nous obtenons donc l'équation d'un espace plan à $n-1$ dimensions.

(*) Ce travail a été présenté à la Société des sciences dans sa séance de juin 1889.

Si nous désignons par ρ un facteur de proportionnalité, cet espace aura pour coordonnées,

$$\left.\begin{array}{l} \rho\xi_1 = \quad 0 \quad + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n+1}x_{n+1}, \\ \rho\xi_2 = -a_{12}x_1 + \quad 0 \quad + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n+1}x_{n+1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \rho\xi_{n+1} = -a_{1n+1}x_1 - a_{2n+1}x_2 - \cdots - a_{nn+1}x_n + 0; \end{array}\right\} \quad (A)$$

nous dirons que cet espace correspond au point X.

En multipliant les équations précédentes respectivement par x_1, x_2, ..., x_{n+1} et faisant la somme, nous obtenons,

$$(\xi X) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_{n+1}x_{n+1} = 0$$

Donc, à un point de l'espace, X, il correspond un espace plan à $n-1$ dimensions, passant par le point considéré.

Nous appellerons le déterminant, Δ, des coefficients des x_i dans les équations (A), le *discriminant* de la forme f; il est visible que ce discriminant est un déterminant symétrique gauche. Nous distinguerons, pour la suite, deux cas: 1° n impair; 2° n pair.

II. — Si n est impair, le déterminant Δ, qui est d'ordre pair, est un carré. Nous supposerons, d'abord, ce carré différent de zéro. Le système (A) peut alors être résolu par rapport aux quantités x_i; si nous remarquons que les mineurs A_{ik} et A_{ki} de Δ sont égaux et de signes contraires, nous aurons les formules,

$$\left.\begin{array}{l} \rho' x_1 = \quad 0 \quad + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + \cdots + A_{1n+1}\xi_{n+1}, \\ \rho' x_2 = -A_{12}\xi_1 + \quad 0 \quad + A_{23}\xi_3 + \cdots + A_{2n+1}\xi_{n+1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \rho' x_{n+1} = -A_{1n+1}\xi_1 - A_{2n+1}\xi_2 - A_{3n+1}\xi_3 - \cdots - A_{n.n+1}\xi_n + 0. \end{array}\right\}$$

Nous déduisons, également de ces formules,

$$(\xi X) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_{n+1}x_{n+1} = 0.$$

Dans la corrélation définie par $f = 0$, à un espace plan à $n - 1$ dimensions, il correspond un point qui est situé dans cet espace.

A un point X_1 de coordonnées x_i^1 il correspond un espace Ξ_1 passant par X_1, et à un point X_2 de coordonnées x_i^2 il correspond un espace Ξ_2 passant par X_2 : on a les relations,

$$(X_1\Xi_1) = 0, \quad (X_2\Xi_2) = 0.$$

A tout point X de la droite (X_1X_2), il correspond un espace à $n - 1$ dimensions passant par X et par $(\Xi_1\Xi_2)$.

En effet, si l'on prend

$$X = X_1 + \lambda X_2,$$

on obtient, d'après les formules (A),

$$\Xi = \Xi_1 + \lambda \Xi_2;$$

on a

$$(X\Xi) = (X_1\Xi_1) + \lambda^2(X_2\Xi_2) + \big((X_1\Xi_2) + (X_2\Xi_1)\big)\lambda = 0,$$

puisque

$$(X_1\Xi_2) = \sum_{ik} (x_k^1 x_i^2 - x_k^2 x_i^1) a_{ik}$$

et

$$(X_2\Xi_1) = \sum_{ik} (x_k^2 x_i^1 - x_i^2 x_k^1) a_{ik},$$

donc,

$$(X_1\Xi_2) + (X_2\Xi_1) = 0.$$

A tout espace à $n - 1$ dimensions Ξ passant par (X_1X_2), il correspond un point X situé dans Ξ et dans $(\Xi_1\Xi_2)$.

En effet, si l'on a

$$(\Xi X_1) = 0, \quad (\Xi X_2) = 0,$$

on obtient :

$$(X\Xi_1) = 0, \quad (X\Xi_2) = 0,$$

d'après les relations

$$(\Xi X_1) + (X\Xi_1) = 0,$$

et

$$(\Xi X_2) + (X\Xi_2) = 0.$$

On démontrerait de même qu'à tout espace à $n-1$ dimensions, passant par $(\Xi_1\Xi_2)$, il correspond un point de (X_1X_2) et qu'à un point de $(\Xi_1\Xi_2)$, il correspond un espace à $n-1$ dimensions, passant par (X_1X_2).

La droite (X_1X_2) et l'espace à $n-2$ dimensions $(\Xi_1\Xi_2)$ seront appelés *espaces conjugués*. Si ces deux espaces ont un point en commun, ils coïncident.

En effet, soient : X le point commun, Ξ l'espace correspondant; on a

$$X = X_1 + \lambda X_2$$

et

$$(X_1\Xi_1) = 0, \quad (X_2\Xi_2) = 0,$$

$$(X\Xi_1) = 0, \quad (X\Xi_2) = 0;$$

or, d'après les formules (A),

$$\Xi = \Xi_1 + \lambda\Xi_2,$$

on a donc :

$$(X\Xi_1) = (X_1\Xi_1) + \lambda(X_2\Xi_1) = \lambda(X_2\Xi_1) = 0$$

et

$$(X\Xi_2) = (X_1\Xi_2) + \lambda(X_2\Xi_2) = \lambda(X_1\Xi_2) = 0.$$

On peut donc énoncer cette propriété :

Théorème I. — *Si une droite rencontre son espace conjugué, elle y est contenue tout entière et réciproquement.*

En général, à k points $X_1, X_2, \ldots, X_k$, dont la jonction forme un espace à $k-1$ dimensions, E_{k-1}, il correspond k espaces plans à $n-1$ dimensions, dont l'intersection forme un espace à $n-k$ dimensions, E_{n-k}. Ces deux espaces correspondants sont conjugués, en ce sens qu'à tout espace à ρ dimensions situé ou passant par l'un, il correspond un espace à $n-\rho-1$ dimensions passant ou situé dans l'autre.

Supposons que deux espaces conjugués E_{k-1} et E_{n-k} ont en commun un espace à $k-2$ dimensions, E_{k-2} : il est d'abord évident que cet espace E_{k-2} coïncide avec son espace correspondant; par conséquent, si nous le considérons comme étant la jonction de $k-1$ points,

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{k-1},$$

et si

$$\Xi_1, \quad \Xi_2, \quad \ldots, \quad \Xi_{k-1},$$

sont les espaces correspondants de ces points, nous aurons les conditions,

$$\left.\begin{array}{l}
(X_1\Xi_1) = (X_1\Xi_2) = \cdots = (X_1\Xi_{k-1}) = 0, \\
(X_2\Xi_1) = (X_2\Xi_2) = \cdots = (X_2\Xi_{k-1}) = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
(X_{k-1}\Xi_1) = (X_{k-1}\Xi_2) = \cdots = (X_{k-1}\Xi_{k-1}) = 0.
\end{array}\right\}$$

L'espace E_{k-1} peut être considéré comme étant la jonction de E_{k-2} et d'un point X_1; E_{n-k} peut être considéré comme étant l'intersection de l'espace correspondant de E_{k-2} et de Ξ, correspondant de X. Or E_{n-k} doit contenir E_{k-2}, on a donc de plus les conditions :

$$(X_1\Xi) = (X_2\Xi) = \cdots = (X_{k-1}\Xi) = (X\Xi) = 0,$$

et comme conséquence :

$$(X\Xi_1) = (X\Xi_2) = \cdots = (X\Xi_{k-1}) = 0.$$

En interprétant ce résultat, nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Deux espaces conjugués à* k — 1 *et à* n — k *dimensions, qui ont en commun un espace à* k — 2 *dimensions, coïncident.*

On démontrerait facilement que, si l'espace E_{k-1} rencontre son espace conjugué en un espace à $k-h$ dimensions, E_{k-h}, tous les espaces à $k-h+1$ dimensions passant par E_{k-h} et situés dans E_{k-1}, coïncident avec leurs espaces conjugués, et que les espaces à $n-k+h-2$ dimensions passant par E_{n-k}, et situés dans l'espace à $n-k+h-1$ dimensions, conjugué de E_{k-h}, passent par leurs espaces conjugués.

Nous pourrions démontrer toute une suite de théorèmes sur les espaces qui se correspondent (*); pour le moment, nous nous bornerons à énoncer les principales propriétés, en nous réservant de revenir ultérieurement sur ce sujet.

THÉORÈME III. — *Les espaces* k *dimensions d'un faisceau dont l'axe est un espace à* k — 1 *dimensions qui se correspond, et qui sont situés dans l'espace conjugué à cet axe, se correspondent.*

THÉORÈME IV. — *Les espaces à* k *dimensions qui se correspondent et qui appartiennent à un faisceau dont l'espace axial à* k — 1 *dimensions se correspond, sont situés dans l'espace conjugué à cet axe.*

THÉORÈME V. — *Les espaces à* k + i *dimensions qui se correspondent et passent par un espace à* k *dimensions qui se correspond, sont situés dans l'espace conjugué à cet espace à* k *dimensions.*

THÉORÈME VI. — *Tous les espaces à* k + i *dimensions passant par un espace à* k *dimensions qui coïncide avec son espace conjugué, et qui sont situés dans cet espace conjugué, se correspondent.*

THÉORÈME VII. — *La jonction de deux espaces qui se correspondent, situés dans deux espaces conjugués qui n'ont aucun élément en commun, est un espace qui se correspond.*

THÉORÈME VIII. — *Tout espace à* i + h + 1 *dimensions qui rencontre deux espaces conjugués n'ayant aucun élément en commun, suivant un espace à* i *et un espace à* h *dimensions qui se correspondent, se correspond.*

En particulier, toute droite qui rencontre deux espaces conjugués quelconques se correspond, puisque les deux points

(*) Nous appellerons désormais ainsi deux espaces conjugués qui passent ou sont situés l'un dans l'autre.

d'intersection de la droite avec ces deux espaces sont situés dans leurs espaces correspondants. On déduit de là, immédiatement, qu'une corrélation polaire involutive dans un espace à un nombre impair n de dimensions, est déterminée par $n-1$ couples de droites et d'espaces à $n-2$ dimensions conjugués.

Soient,

$$E_1^1, E_{n-2}^1; \quad E_1^2, E_{n-2}^2; \ldots, E_1^{n-1}, E_{n-2}^{n-1};$$

ces $n-1$ couples; on aura à résoudre le problème suivant :

Étant donné un espace à $n-1$ dimensions, en trouver le pôle, ou inversement étant donné un point E_0, en trouver l'espace polaire.

Premier cas : L'espace E_{n-1} rencontre le couple E_1^i, E_{n-2}^i, (i étant compris entre 1 et $n-1$) respectivement en un point E_0^i et en un espace à $n-3$ dimensions E_{n-3}^i. Soit $H_{n-2}^{(i)}$, l'espace à $n-2$ dimensions qui unit ce point et cet espace.

$H_{n-2}^{(i)}$ a pour correspondant une droite située dans cet espace. En effet, au point E_0^i il correspond un espace à $n-1$ dimensions E_{n-1}^i, passant par E_0^i et par E_{n-3}^i. A l'espace E_{n-3}^i, il correspond un espace à deux dimensions E_2^i passant par E_1^i et donc par E_0^i. Il s'ensuit que l'espace H_{n-3}^i ayant en commun avec sa droite correspondante le point E_0^i, la contient tout entière. De plus, puisque cette droite passe par le pôle de E_{n-1}, il en est de même de H_{n-2}^i. Par suite, les $n-1$ espaces H_{n-2}^i ($i = 1 \ldots n-1$), étant situés dans l'espace E_{n-1}, se couperont en un point qui sera le pôle de cet espace E_{n-1}.

Second cas : On se donne le point E_0, dont il s'agit de déterminer l'espace polaire. En faisant un raisonnement analogue au précédent, on verrait facilement que l'espace à $n-1$ dimensions qui unit les $n-1$ droites d'intersection des espaces à deux et à $n-1$ dimensions, $(E_0 E_1^i)$ et $(E_0 E_{n-2}^i)$, est l'espace cherché.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette étude qui est l'extension, pour les espaces supérieurs, des propriétés des systèmes de droites qui forment les complexes linéaires dans l'espace à trois dimensions.

III. — Nous avons supposé jusqu'à présent que le discriminant Δ de la forme d'involution était différent de zéro. Supposons $\Delta = 0$; d'après un théorème dû à M. LE PAIGE (*), les mineurs du déterminant Δ sont proportionnels à la racine carrée de la valeur de ce déterminant; ces mineurs sont donc tous nuls dans le cas actuel.

Le système des $n+1$ équations linéaires

$$\frac{df}{dy_i} = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n+1)$$

se réduit à un système de $n-1$ équations. Ce système représente une droite, que nous appellerons *droite singulière* de la corrélation.

Prenons sur cette droite, deux points Y et Z, de coordonnées y_i et z_i. A un point X, il correspond toujours un espace à $n-1$ dimensions, parfaitement déterminé par les équations (A). Multiplions ces équations respectivement par y_1 et z_1, y_2 et z_2, ..., y_{n-1} et z_{n+1} et faisons la somme, nous obtenons,

$$\rho \sum_i y_i \xi_i = 0$$

et

$$\rho \sum_i z_i \xi_i = 0;$$

on doit donc avoir :

$$\rho = 0,$$

ou bien :

$$\sum y_i \xi_i' = 0$$

et

$$\sum z_i \xi_i = 0.$$

D'après ces considérations,

1° A un point quelconque X de l'espace, il correspond un espace à $n-1$ dimensions bien déterminé passant par la droite singulière de la corrélation.

(*) *Sur les déterminants hémisymétriques d'ordre pair* (SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME, Mars 1880).

2° A tout point de la droite singulière, il correspond un espace à $n - 1$ dimensions indéterminé. Cependant, d'après la nature de la corrélation, cet espace indéterminé doit passer par la droite singulière.

A un espace à $n - 1$ dimensions Ξ, il correspond un point X dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant les équations (A) par rapport aux x_i. Or, le déterminant des coefficients des inconnues étant nul ainsi que ses mineurs, il s'ensuit qu'il existe deux relations linéaires distinctes entre les coefficients des inconnues. Les coefficients de ces relations linéaires sont, par exemple, les coordonnées des deux points Y et Z.

Pour que les équations (A) soient compatibles, il faut qu'entre les seconds membres de ces équations il existe les deux mêmes relations linéaires. On doit donc avoir, ou bien

$$\rho = 0,$$

ou bien

$$\sum \xi_i y_i = 0$$

et

$$\sum \xi_i z_i = 0.$$

Si $\rho = 0$, l'espace Ξ est indéterminé et le point correspondant est indéterminé sur la droite singulière.

Si la seconde condition est remplie, les équations (A) sont résolubles par rapport aux x_i en fonction de deux d'entre elles, par exemple x_n et x_{n+1}, et l'on obtient des formules analogues à

$$x_i = A + Bx_n + Cx_{n+1};$$

le point X se trouve, donc, indéterminé sur un espace à deux dimensions. Ce plan passe nécessairement par la droite singulière et il est situé dans l'espace Ξ.

En résumé, à un espace à $n - 1$ dimensions, passant par la droite singulière, il correspond les points d'un espace à deux dimensions passant par la droite singulière.

Un espace à $n - 1$ dimensions qui ne passerait pas par la droite singulière ne pourrait avoir de pôle.

D'un autre côté, si Ξ est l'espace correspondant au point X, tous les points du plan qui unit le point X à la droite singulière, ont le même espace polaire, Ξ. Remarquons encore que toutes les droites qui rencontrent la droite singulière et tous les espaces à deux dimensions passant par cette droite sont situés dans leurs espaces correspondants. De plus, ces droites et ces plans sont les seuls qui puissent jouir de cette propriété.

IV. — Supposons maintenant que le discriminant Δ, ainsi que ses mineurs d'ordre $n - k$, k étant un nombre impair, soient nuls. Dans ce cas (*), les mineurs d'ordre $n - k - 1$ sont nuls également. Les $n + 1$ équations $\frac{df}{dy_i} = 0$ se réduisent, donc, à $n - k - 2$ d'entre elles; ces équations représenteront un espace à $k + 2$ dimensions, que nous appellerons *espace singulier* de la corrélation.

D'après le mode de raisonnement dont nous avons déjà fait usage plus haut, il est facile de démontrer les propriétés suivantes:

1° A un point quelconque de l'espace, il correspond un espace à $n - 1$ dimensions passant par l'espace singulier;

2° A un point du support de l'espace singulier, il correspond un espace indéterminé passant par cet espace singulier;

3° A un espace à $n - 1$ dimensions Ξ passant par l'espace singulier, il correspond une $(k + 3)^{\text{uple}}$ infinité de pôles, situés dans un espace à $k + 3$ dimensions, passant par l'espace singulier et situé dans l'espace Ξ;

4° Un espace à $n - 1$ dimensions ne passant pas par l'espace singulier ne peut avoir de pôle.

D'un autre côté, si Ξ est l'espace correspondant à un point X, tous les points de l'espace à $k + 2$ dimensions qui unit le point X à l'espace singulier, ont le même espace Ξ pour correspondant.

Tous les espaces à une, deux, ..., $k + 2$, $k + 3$, dimensions qui rencontrent l'espace singulier respectivement en un, deux, ..., $k + 2$, $k + 3$ points, sont situés dans leur espace correspondant. De plus, ce sont les seuls espaces à ces nombres de dimensions qui puissent jouir de cette propriété.

(*) Nous avons établi ce résultat dans une Note *Sur une propriété des déterminants symétriques gauches* (Mém. Soc. Roy. d. Sc. de Liège, t. XVII).

D'autre part, les espaces à $n-1$ dimensions passant par l'espace singulier, E_{k+2}, forment une $(n-k-3)^{\text{uple}}$ infinité linéaire, et les espaces à $k+3$ dimensions passant par E_{k+2}, forment également une $(n-k-3)^{\text{uple}}$ infinité linéaire. Nous pouvons donc considérer les plans à $n-1$ dimensions, et les plans à $k+3$ dimensions, passant par E_{k+2}, comme des points et des plans à $(n-k-4)$ dimensions d'un espace à $n-k-3$ dimensions. Ces points et ces plans peuvent s'obtenir en coupant les espaces E_{k+3} et E_{n-1}, passant par E_{k+2}, par un espace à $n-k-3$ dimensions ne rencontrant pas E_{k+2}. Si donc, on construit la corrélation polaire involutive non dégénérescente dans cet espace à $n-k-3$ dimensions, et si l'on joint tous les éléments correspondants de cette corrélation à l'espace E_{k+3}, on obtiendra tous les éléments correspondants de la corrélation dégénérescente de l'espace à n dimensions.

D'après ce qui précède, l'étude d'une corrélation polaire involutive, k fois dégénérescente (k étant impair) dans un espace à un nombre impair, n, de dimensions, revient à l'étude d'une corrélation polaire involutive non dégénérescente dans un espace à $n-k-4$ dimensions.

V. — Recherchons la forme qui, égalée à zéro, représente une corrélation polaire involutive non dégénérescente, en prenant comme polyèdre de référence un polyèdre dont les sommets sont les pôles des faces.

Puisque n est impair, nous écrirons $n=2m-1$. Nous supposerons que le sommet A_{2i} du polyèdre de référence, qui a pour coordonnées,

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad \ldots,\quad x_{2i-1}=0,$$

$$x_{2i}=a_{2i},\quad x_{2i+1}=0,\quad \ldots,\quad x_{2m}=0,$$

a pour espace correspondant la face α_{2i-1} déterminée par

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=0,\quad \ldots,\quad \xi_{2i-1}=\alpha_{2i-1},$$

$$\xi_{2i}=0,\quad \xi_{2i+1}=0,\quad \ldots,\quad \xi_{2m}=0.$$

Nous aurons par conséquent les conditions :

$$a_{1.2i} = a_{2.2i} = \cdots = a_{2i-2.2i} = 0, \quad a_{2i-1.2i} = a_{2i} = \rho\alpha_{2i-1},$$

$$a_{2i.2i} = a_{2i+1.2i} = \cdots = a_{2m.2i} = 0.$$

Le sommet A_{2i-1} qui a pour coordonnées

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_{2i-1} = a_{2i-1}, \quad x_{2i} = 0, \quad \ldots, \quad x_{2m} = 0,$$

a pour correspondante la face α_{2i},

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_{2i-1} = 0, \quad \xi_{2i} = \alpha_{2i}, \quad \xi_{2i+1} = 0, \quad \ldots, \quad \xi_{2m} = 0;$$

nous aurons donc :

$$a_{1.2i-1} = a_{2.2i-1} = \cdots = a_{2i-1.2i-1} = 0, \quad a_{2i.2i-1}a_{2i-1} = \rho\alpha_{2i},$$

$$a_{2i+1.2i-1} = 0, \quad \ldots, \quad a_{2m.2i-1} = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer

$$-\frac{a_{2i}}{a_{2i-1}} = \frac{\alpha_{2i-1}}{\alpha_{2i}},$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, m.$

D'après les conditions que nous obtiendrons, la forme d'involution pourra s'écrire :

$$f = \sum_1^m \frac{a_{2i}}{\alpha_{2i-1}}(x_{2i}y_{2i-1} - x_{2i-1}y_{2i}) = 0;$$

c'est la forme *canonique* de la corrélation polaire involutive dans un espace à un nombre impair de dimensions.

L'équation d'une corrélation $k = 2k' - 1$ fois dégénérescente s'obtiendra en prenant l'espace singulier sur le polyèdre de référence; on trouvera facilement que sa forme canonique est

$$f = \sum_1^{m-k'-2} \frac{a_{2i}}{\alpha_{2i-1}}(x_{2i}y_{2i-1} - x_{2i-1}y_{2i}) = 0.$$

VI. — Dans le cas particulier de $n = 3$, la forme générale est

$$\begin{aligned} a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) &+ a_{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + a_{14}(x_1y_4 - x_4y_1) \\ &+ a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{24}(x_2y_4 - x_4y_2) \\ &+ a_{34}(x_3y_4 - x_4y_3) = 0; \end{aligned}$$

la forme canonique est

$$f = A_{12}(X_1Y_2 - X_2Y_1) + A_{34}(X_3Y_4 - X_4Y_3) = 0.$$

L'équation du complexe des droites qui se correspondent est, en coordonnées radiales de PLUCKER,

$$a_{12}p_{12} + a_{13}p_{13} + a_{14}p_{14} + a_{23}p_{23} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34} = 0;$$

sa forme canonique est

$$A_{12}P_{12} + A_{34}P_{34} = 0.$$

Dans le cas de $\Delta = 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0,$$

toutes les droites du complexe, d'après ce que nous avons vu, rencontrent la droite singulière. Cette droite aura pour coordonnées radiales les six quantités a_{12}, a_{13}, ..., a_{34}.

VII. — Supposons maintenant n pair; le déterminant Δ étant un déterminant symétrique gauche d'ordre impair, est nul identiquement. Les $n + 1$ équations,

$$\frac{df}{dj_i} = 0,$$

se réduisent à n. Leur ensemble représente un point (X), que nous appellerons *point singulier*.

A un point de l'espace, il correspond un espace à $n - 1$ dimensions, bien déterminé et passant par (X).

Au point (X), il correspond un espace à $n - 1$ dimensions indéterminé de la gerbe (X).

A un espace à $n - 1$ dimensions, il correspond les points d'une droite passant par (X) et situé dans cet espace à $n - 1$ dimensions.

Un espace à $n - 1$ dimensions, qui ne passerait pas par le point (X), ne pourrait avoir de pôle.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons employé plus haut, nous montrerait que l'étude d'une corrélation polaire involutive, dans un espace à un nombre pair, n, de dimensions, revient à l'étude d'une corrélation dans un espace à $n - 1$ dimensions ne passant pas par le point singulier de la corrélation proposée. Nous pouvons prendre pour cet espace à $n - 1$ dimensions, l'espace qui a pour coordonnées

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_{2n} = 0, \quad x_{2n+1} = \alpha_{2n+2}.$$

L'étude de la corrélation définie par

$$f = \sum_{ik=1}^{n+1} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0,$$

revient, donc, à l'étude de la corrélation, définie par

$$f_1 = \sum_{ik=1}^{n} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0.$$

Il suit de là que la forme *canonique* de f est, en posant $n = m$,

$$f = \sum_{1}^{m} \alpha_i(x_{2i} y_{2i-1} - x_{2i-1} y_{2i}).$$

Observons encore que pour étudier les dégénérescences d'une corrélation polaire involutive dans un espace à un nombre pair de dimensions, il suffit de connaître les dégénérescences d'une corrélation dans un espace à un nombre impair de dimensions. De plus, une corrélation dégénérescente ou non dans un espace à $2n$ dimensions, est la projection d'une corrélation dégénérescente ou non dans un espace à $2n - 1$ dimensions.

SUR

UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS SYMÉTRIQUES GAUCHES;

PAR

François DERUYTS,

ASSISTANT A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

SUR

UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS SYMÉTRIQUES GAUCHES.

I. — Soit un déterminant symétrique gauche d'ordre pair,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1.2n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2.2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3.2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1k} & -a_{2k} & -a_{3k} & \dots & 0 & \dots & a_{k.2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2n} & -a_{2.2n} & -a_{3.2n} & \dots & -a_{k.2n} & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

d'après un théorème bien connu, ce déterminant est le carré d'une expression f, qui est, visiblement, linéaire par rapport à chacun des éléments a_{ik} du déterminant; nous pourrons donc écrire

$$\Delta = (a_{ik}f_1 + f_2)^2,$$

f_1 et f_2 étant des expressions indépendantes de a_{ik}.

Nous en déduisons :

$$\frac{d\Delta}{da_{ik}} = 2f_1(a_{ik}f_1 + f_2) = 2f_1\sqrt{\Delta}.$$

Si nous remarquons que les mineurs d'ordre $2n - 1$ du déterminant Δ sont égaux et de signes contraires, nous obtenons le théorème suivant qui est dû à M. Le Paige (*) :

Les mineurs d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair

(*) *Sur les déterminants hémisymétriques d'ordre pair* (Société royale des sciences de Bohême, Mars 1880).

sont divisibles par la racine carrée de la valeur de ce déterminant.

Nous déduisons de là que *si un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est nul, ses mineurs sont nuls.*

Supposons maintenant que les mineurs d'ordre $2k$ soient tous nuls; il s'ensuit, par exemple, que les déterminants symétriques gauches d'ordre pair,

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1.2k-1} & a_{1.2k+i} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2.2k-1} & a_{2.2k+i} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3.2k-1} & a_{3.2k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2.2k-1} & -a_{3.2k-1} & \cdots & 0 & a_{2k-1.2k+i} \\ -a_{1.2k+i} & -a_{2.2k+i} & -a_{3.2k+i} & \cdots & -a_{2k-1.2k+i} & 0 \end{vmatrix},$$

sont nuls, i variant de 0 à $2(n-k)$.

D'après le théorème précédent, tous les mineurs d'ordre $2k-1$ de ces déterminants sont nuls. Nous avons donc les relations :

$$\left\Vert \begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1.2k-1} & a_{1.2k+i} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2.2k-1} & a_{2.2k+i} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3.2k-1} & a_{3.2k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2.2k-1} & -a_{3.2k-1} & \cdots & 0 & a_{2k-1.2k+i} \end{matrix} \right\Vert = 0,$$

i variant de 0 à $2(n-k)$.

Il résulte de là que le déterminant multiple

$$\left\Vert \begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1.2n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2.2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3.2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2.2k-1} & -a_{3.2k-1} & \cdots & a_{2k-1.2n} \end{matrix} \right\Vert$$

est nul; en d'autres termes, les mineurs d'ordre $2k-1$ formés avec les $2k-1$ premières rangées du déterminant Δ sont nuls. Or, nous pouvons faire en sorte que les mineurs formés à l'aide du tableau rectangulaire composé de $2k - 1$ rangées quelconques de Δ soient formés à l'aide des $2k - 1$ premières rangées d'un déterminant composé des mêmes éléments que Δ et qui en ait la même forme et la même valeur. Il suffit pour cela d'effectuer sur Δ un nombre convenable de transpositions de colonnes et de rangées.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Si les mineurs d'ordre 2k *d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair sont tous nuls, les mineurs d'ordre* 2k — 1 *sont nuls également.*

II. — Soit maintenant un déterminant symétrique gauche d'ordre impair, $2n + 1$. Il est nul identiquement. Supposons que les mineurs d'ordre $2k$ sont nuls; nous en déduirons, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1.2k-1} & a_{1.2k+i} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2.2k-1} & a_{2.2k+i} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3.2k-1} & a_{3.2k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2.2k-1} & & \cdots & 0 & a_{2k-1\,2k+i} \\ -a_{1\,2k+i} & -a_{2\,2k+i} & & \cdots & -a_{2k-1.2k+i} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

i variant de 0 à $2(n - k) + 1$.

Ces déterminants étant d'ordre pair, leurs mineurs sont nuls; donc on a les relations :

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1.2k-1} & a_{1.2k+i} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2.2k-1} & a_{2.2k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2.2k-1} & \cdots & 0 & a_{2k-1.2k+i} \end{Vmatrix} = 0,$$

i variant de 0 à $2(n - k) + 1$; on peut encore écrire :

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1.2n+1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2.2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1.2k-1} & -a_{2..k-1} & \cdots & a_{2k-1.2n+1} \end{Vmatrix} = 0.$$

Si donc les mineurs d'ordre $2k$ sont nuls, les mineurs d'ordre $2k - 1$ le sont également. Les résultats que nous avons obtenus se résument en ce théorème :

Si les mineurs d'ordre 2k *d'un déterminant symétrique gauche quelconque sont nuls, les mineurs d'ordre* 2k — 1 *sont nuls également.*

Ce théorème est important pour la théorie de l'élimination et pour la résolution des équations linéaires.

Juin 1889.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE L'INVOLUTION

ET DE

L'HOMOGRAPHIE UNICURSALE

PAR

François DERUYTS,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
ASSISTANT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE,
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE.

On sert utilement une science en cherchant
à la ramener à des principes généraux.

Le mémoire actuel a été couronné au concours universitaire de l'année 1889-1890 ; la question à traiter était ainsi énoncée :

Exposer et étendre les recherches des géomètres sur la théorie de l'involution et de l'homographie.

Le jury du concours avait proposé l'impression de ce mémoire aux frais de l'État. M. le Ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique a exprimé le regret de ne pouvoir, à cause de raisons budgétaires, donner suite à cette proposition.

C'est dans ces conditions que la Société royale des Sciences de Liège a bien voulu décider de publier dans ses Recueils le mémoire, tel qu'il avait été présenté au jugement du jury.

Que la Société royale des Sciences veuille bien agréer les plus vifs remerciements de l'auteur !

Liège, le 21 octobre 1890.

F. D.

INTRODUCTION.

L'objet de ce mémoire est l'étude, aussi complète que possible au point de vue théorique, des involutions et des homographies des ordres supérieurs.

La plus grande partie de notre travail est basée sur une représentation géométrique des involutions quelconques.

Les considérations qui nous ont conduit à cette manière de procéder sont très simples, dans le cas de la correspondance entre des couples d'éléments de supports rationnels; d'autre part l'extension au cas général en est immédiate. C'est pourquoi il nous a paru avantageux de consacrer le premier chapitre de notre travail à l'étude de l'involution et de l'homographie entre des couples d'éléments. Nous avons réservé, dans ce chapitre, une large part à des applications que nous croyons nouvelles. Nous aurions désiré y exposer, en même temps, des applications déjà connues, entre autres quelques-unes des belles recherches de Chasles; nous n'avons pu signaler ces recherches qu'en les effleurant, en raison des limites que nous avons dû nous imposer.

Le second chapitre comprend l'étude générale des involutions d'ordre et de rang quelconques. En partant directement de la définition, nous établissons une représentation géométrique dans les hyperespaces, qui nous permet de retrouver d'une façon très simple les beaux résultats obtenus par MM. Le Paige, Weyr et Lerch. De plus, notre procédé conduit à un assez grand nombre de propriétés nouvelles. Nous signalerons notamment : les propriétés et les théorèmes concernant les groupes d'éléments neutres d'espèce quelconque ; la recherche des conditions pour qu'un nombre quelconque d'involutions aient des groupes d'éléments communs, en nombre fini ou infini ; le cas échéant, le nombre de ces groupes et leurs propriétés. Nous avons été conduit également à quelques théorèmes nouveaux sur les involutions conjuguées.

Incidemment, nous avons indiqué une extension du principe de correspondance de Chasles ; nous pensons cette extension nouvelle ; du moins, nous ne l'avons pas rencontrée dans les ouvrages que nous avons pu consulter.

Dans le troisième chapitre, nous exposons quelques applications de l'involution, ainsi que les constructions géométriques des involutions cubiques données par M. Le Paige : nous avons ajouté des remarques qui nous paraissent présenter quelque intérêt.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'homographie d'ordre n et de rang $n-1$. Nous y rappelons les principaux théorèmes dus à M. Le Paige, en y ajoutant quelques propriétés nouvelles, notamment sur le groupement des éléments neutres et sur le nombre des groupes communs à n homographies.

Nous indiquons un mode de représentation de ces homographies ; jusqu'à présent, nous n'avons pu démontrer que ce procédé fût tout à fait général ; néanmoins, par ses conséquences, il nous a paru digne d'être pris en considération.

Nous indiquons également une représentation géométrique de l'homographie cubique, ainsi que diverses constructions qui s'y rattachent.

Comme application de cette théorie, nous montrons comment on peut engendrer les courbes algébriques d'ordre quelconque, ainsi que certaines surfaces; comme conséquences, nous déduisons quelques propriétés des courbes et des surfaces cubiques dues à M. Le Paige. Nous aurions voulu donner plus d'extension à ces applications et, entre autres, exposer les belles recherches de MM. Le Paige et Folie; pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous avons dû y renoncer.

Enfin dans le dernier chapitre, nous avons exposé quelques-unes des propriétés principales de l'homographie d'ordre n et de rang k. Ces propriétés semblaient tout à fait inconnues, sauf pourtant les propriétés des éléments multiples qui avaient été données par M. Le Paige. Nous avons généralisé les résultats obtenus à ce sujet en recherchant le nombre des groupes d'éléments multiples associés.

Nous avons émis quelques considérations, qui ne semblent pas dénuées d'importance, sur ce que l'on doit entendre par éléments neutres d'une homographie quelconque.

Pour terminer, nous avons fait, d'une façon complète, l'étude des groupes d'éléments communs à un nombre quelconque d'homographies. Nous avons démontré les théorèmes qui s'y rattachent dans des cas particuliers, en nous bornant à énoncer les théorèmes généraux, dans le but de ne pas étendre outre mesure ce travail.

Comme on pourra le remarquer, nous n'avons pas introduit la notion du rapport anharmonique : nous avons pensé que cette notion serait inutile pour notre étude, parce que dans les cas où elle se présente avec quelque importance elle peut être remplacée, même avec avantage, par la notion de l'homographie ou de l'involution.

Quant au procédé de démonstration, nous n'avons employé ni la méthode purement analytique, ni la méthode purement synthétique; nous avons employé l'une ou l'autre, suivant qu'elle semblait donner au raisonnement quelque simplicité ou quelque élégance.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE L'INVOLUTION

ET DE

L'HOMOGRAPHIE UNICURSALE.

CHAPITRE I.

Rappelons brièvement ce que l'on doit entendre par figure de première espèce ou du premier rang.

Une *figure de première espèce* est un système simplement infini d'éléments, tels que chacun d'entre eux est défini, sans ambiguïté, par un paramètre ou par une fonction algébrique entière d'un paramètre.

Comme exemples de semblables figures, nous pouvons citer : les points ou les tangentes d'une courbe plane unicursale; les points ou les tangentes, ou les plans osculateurs d'une courbe gauche unicursale; les points ou les espaces osculateurs d'une courbe unicursale d'un espace linéaire à un nombre quelconque de dimensions. Dans un autre ordre d'idées, nous pouvons encore citer le système des courbes d'un faisceau, ou le système des surfaces d'un faisceau : dans ces systèmes, les courbes ou les surfaces des faisceaux doivent être considérées comme des éléments.

Nous pouvons, par un nombre convenable de projections et de sections, ramener les éléments d'une figure de première espèce à être les éléments d'une autre figure de première espèce.

Ainsi, par exemple, nous pouvons ramener les courbes du second ordre d'un faisceau à correspondre uniformément aux points d'une droite.

Considérons, en effet, une droite arbitraire passant par l'un des quatre points de base du faisceau : une conique quelconque du système rencontre cette droite en un point qui correspond à cette conique et qui, inversement, la définit.

Nous pouvons même amener les points d'une droite quelconque d du plan à correspondre uniformément aux coniques du faisceau.

En effet, à toute conique du faisceau il correspond un point d'une droite, passant par l'un des points de base du faisceau; la droite qui unit ce point à un point fixe quelconque M, coupe la droite d en un point qui correspond à la conique et qui, inversement, la définit. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet; nous aurons, du reste, l'occasion d'y revenir ultérieurement.

I

1. Définition. — *Si, entre les éléments de deux figures de première espèce, il existe une corrélation telle qu'à un élément de l'une des figures il corresponde, sans ambiguïté, un élément de l'autre figure et vice versa, les couples d'éléments homologues forment deux séries homographiques* ou, plus simplement, *une homographie.*

D'après cette définition (*), si

$$(x1_1,\ x1_2),\quad (x2_1,\ x2_2)$$

sont les paramètres homogènes de deux éléments appartenant

(*) Voir, par exemple, les *Mélanges de Géométrie pure* de M. *de Jonquières*, p. 153.

respectivement à la première et à la seconde figure, et si ces paramètres sont ceux de deux éléments homologues, il est clair qu'ils seront reliés par l'égalité à zéro d'une fonction algébrique du second degré et linéaire par rapport à chacun d'eux.

L'équation d'homographie sera représentée par une forme bilinéaire binaire, égalée à zéro. Cette équation s'écrira, symboliquement,

$$f \equiv a^{(1)}_{x1} a^{(2)}_{x2} \equiv b^{(1)}_{x1} b^{(2)}_{x2} \equiv \cdots = 0,$$

ou, sous forme développée,

$$f = \sum a_{ik} x1_i x2_k = 0,$$

i et k prenant les valeurs 1 et 2.

Si nous effectuons sur les variables des substitutions linéaires simultanées, la forme f se transformera en une nouvelle forme bilinéaire binaire; nous en déduisons que, *par projections et sections, des couples d'éléments homographiques se transforment en d'autres couples homographiques.*

Puisque l'équation $f = 0$ contient trois coefficients indépendants, *une homographie est déterminée par trois couples d'éléments homologues.*

2. Si deux séries d'éléments homographiques sont amenées à se trouver sur le même support, il peut arriver qu'à un élément d'une série il corresponde un élément de l'autre série, coïncidant avec le premier élément : il est clair que les paramètres de semblables éléments correspondants sont proportionnels. Si nous introduisons cette hypothèse dans l'équation d'homographie, ou dans une quelconque de ses transformées par substitutions linéaires, nous obtenons une équation du second degré. Donc, *deux séries homographiques superposées possèdent deux groupes composés d'éléments coïncidents.*

Cette propriété permet de démontrer immédiatement une foule de théorèmes importants; rappelons seulement les trois théorèmes suivants, qui nous seront utiles :

Le lieu de l'intersection des rayons homologues de deux fais-

ceaux homographiques est une courbe du second degré, passant par les centres des faisceaux.

Le lieu des jonctions des points homologues de deux ponctuelles homographiques est une courbe de la seconde classe, tangente aux supports des ponctuelles.

Le lieu des jonctions des points homologues de deux ponctuelles homographiques de l'espace est le système des génératrices d'une réglée du second ordre.

3. Soit X_1 et X_2, un couple d'éléments homologues, respectivement de la première et de la seconde série de deux séries homographiques superposées.

A l'élément X_2, considéré comme appartenant à la première série, il correspond un élément X de la seconde série, qui est, en général, différent de X_1.

Cet élément X coïncide avec X_1, si la forme d'homographie est symétrique, c'est-à-dire si on a la condition

$$a_{12} = a_{21}.$$

Dans ce cas, les deux séries sont en *involution*, et le système doit être considéré comme *formé de couples d'éléments déterminés sans ambiguïté, par un de ses éléments, quel que soit cet élément.*

L'équation d'involution s'exprimera par l'égalité à zéro d'une forme bilinéaire binaire symétrique

$$\varphi \equiv a_{x1}a_{x2} \equiv b_{x1}b_{x2} \equiv \cdots = 0,$$

équation que nous écrirons sous forme explicite :

$$\varphi = a_0 x1_1 x2_1 + a_1(x1_1 x2_2 + x1_2 x2_1) + a_2 x1_2 x2_2 = 0.$$

Nous déduisons de la même façon que plus haut les conséquences suivantes : 1° *une involution est déterminée par deux de ses couples ;* 2° *une involution possède deux groupes composés d'éléments coïncidents.*

II

1. Choisissons dans le plan un système de référence, et considérons dans ce système le point dont les coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3 sont proportionnelles aux coefficients a_0, a_1, a_2 de l'équation $\varphi = 0$. Nous dirons que ce point est le *point principal* de l'involution, dont l'équation est $\varphi = 0$.

Si l'involution est décomposable, il existe entre les coordonnées de son point principal la relation

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\lambda 1}{\lambda 2};$$

d'où

$$\rho a_0 = \frac{\lambda 1^2}{\lambda 2^2}, \quad \rho a_1 = \frac{\lambda 1}{\lambda 2}, \quad \rho a_2 = 1,$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Nous en déduisons ce théorème :

Le lieu des points du plan, qui sont les points principaux d'involutions décomposables, est une courbe du second degré.

Nous désignerons dans la suite sous le nom de *courbe normale du plan*, la courbe du second degré dont les équations sont dans le système de référence choisi :

$$\rho x_1 = \frac{\lambda 1^2}{\lambda 2^2}, \quad \rho x_2 = \frac{\lambda 1}{\lambda 2}, \quad \rho x_3 = 1.$$

Toutes les droites passant par le point principal d'une involution déterminée par $\varphi=0$, peuvent se représenter par l'équation

$$a_2 x_1 - a_0 x_3 + k(a_2 x_2 - a_1 x_3) = 0,$$

k étant un paramètre variable. Ces droites rencontrent la courbe normale en des couples de points, dont les paramètres $(\lambda 1, \lambda 2)$ sont les racines de l'équation

$$a_2 \lambda 1^2 + k a_2 \lambda 1 \lambda 2 - (a_0 + k a_1) \lambda 2^2 = 0.$$

Si nous désignons par

$$\frac{\lambda 1_2}{\lambda 1_1}, \quad \frac{\lambda 2_2}{\lambda 2_1}$$

les racines de cette équation pour une valeur particulière de k, nous aurons

$$\frac{\lambda 1_2}{\lambda 1_1} + \frac{\lambda 2_2}{\lambda 2_1} = -k; \quad \frac{\lambda 1_2 \lambda 2_2}{\lambda 1_1 \lambda 2_1} = -\frac{a_0 + k a_1}{a_2}.$$

En éliminant entre ces deux équations le paramètre k, nous obtenons

$$a_0 \lambda 1_1 \lambda 2_1 + a_1(\lambda 1_1 \lambda 2_2 + \lambda 1_2 \lambda 2_1) + a_2 \lambda 1_2 \lambda 2_2 = 0.$$

Ainsi, *les couples de points d'intersection avec la courbe normale des rayons issus du point principal d'une involution, sont les images des couples de cette involution.*

D'après ce que nous avons vu ci-dessus (I, 3), une involution possède deux couples dont les éléments coïncident. Ces couples sont marqués sur la courbe normale par les points de contact des tangentes issues du point principal de l'involution.

Réciproquement, ce procédé de représentation permet de construire les couples d'une involution dont on se donne deux couples d'éléments, représentés sur une conique par deux couples de points X, Y ; X_1, Y_1.

En effet, on sait que toute conique du plan peut être considérée comme une courbe normale ; il s'ensuit que les deux droites de jonction (XY) et (X_1Y_1) se coupent en un point A, qui est le point principal de l'involution. Tous les rayons issus de A marquent sur la conique des couples de points, qui sont des couples de l'involution cherchée.

Si les couples donnés étaient composés de points coïncidents, le point principal A serait le pôle, par rapport à la courbe normale, de la droite qui unit les deux points représentant les couples.

Nous déduirons de là, immédiatement, que *si une involution a ses deux éléments unis imaginaires, tous ses autres couples sont réels.*

2. Soient A et B les points principaux de deux involutions; la droite (AB) rencontre la courbe normale en deux points formant un couple commun aux deux involutions. Il est, de plus, visible qu'il n'en peut exister d'autre; nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant :

Deux involutions, placées sur un même support, ont un couple d'éléments en commun.

3. Considérons une corde quelconque de la courbe normale, passant par le point principal, A, d'une involution, définie par l'équation

$$\varphi = 0.$$

Représentons par X_1 et X_2 les points d'appui de cette corde, et soient $(\lambda 1_1 . \lambda 1_2)$, $(\lambda 2_1 . \lambda 2_2)$, les paramètres de ces points. Puisque les trois points A, X_1, X_2 sont en ligne droite, nous avons les équations

$$\rho a_0 = k_1 \frac{\lambda^2 1_1}{\lambda^2 1_2} + k_2 \frac{\lambda^2 2_1}{\lambda^2 2_2},$$

$$\rho a_1 = k_1 \frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2} + k_2 \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2},$$

$$\rho a_2 = k_1 + k_2,$$

les coefficients k_1, k_2 étant convenablement choisis, et ρ étant un facteur de proportionnalité. Si dans l'équation de l'involution nous remplaçons les coefficients a_0, a_1, a_2 par leurs valeurs tirées des relations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi = {} & k_1(\lambda 1_1 x 1_1 + \lambda 1_2 x 1_2)(\lambda 1_1 x 2_1 + \lambda 1_2 x 2_2) \\ & + k_2(\lambda 2_1 x 1_1 + \lambda 2_2 x 1_2)(\lambda 2_1 x 2_1 + \lambda 2_2 x 2_2) = 0.\end{aligned}$$

Si nous remarquons qu'il existe une infinité de cordes qui passent par le point A, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

L'équation d'une involution quelconque peut être considérée, d'une infinité de manières, comme étant la somme des équations de deux involutions décomposables.

4. Dualistiquement, nous pouvons considérer les coefficients de l'équation de toute involution comme étant les paramètres d'une droite, que nous appellerons *droite polaire* de l'involution. On peut démontrer, de la même façon que ci-dessus, *que les droites polaires des involutions décomposables enveloppent une courbe de la seconde classe, et que les paramètres des points de contact des couples de tangentes menées à cette courbe des points de la droite polaire d'une involution quelconque, vérifient l'équation de cette involution.*

Les points unis de l'involution seront les points de rencontre de sa droite polaire et de la courbe de la seconde classe.

Dans un même système de référence, le point principal et la droite polaire d'une involution sont réciproquement polaires par rapport à la courbe normale.

5. Nous pouvons représenter également des couples en involution sur une courbe normale d'un espace quelconque (*). Pour le cas de l'espace à trois dimensions, il suffit de faire usage de la propriété suivante :

Les plans d'un faisceau dont l'axe rencontre une cubique gauche, marquent sur cette courbe des couples de points formant une involution.

Autrement dit : *les bisécantes d'une cubique gauche, qui s'appuient sur une droite fixe rencontrant cette courbe, marquent sur celle-ci des couples de points formant une involution.*

(*) Nous appelons courbe normale d'un espace à n dimensions, la courbe unicursale de cet espace qui est d'ordre n, c'est-à-dire la courbe rationnelle qui est rencontrée par un espace linéaire quelconque à $n - 1$ dimensions en n points, distincts ou coïncidents.

Nous appellerons la droite fixe, *l'axe de l'involution.*

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit d'indiquer les constructions à effectuer pour déterminer l'axe d'une involution, dont on se donne deux couples, représentés par deux couples de points d'une cubique gauche C_3 : soient A, A'; B, B' ces deux couples.

Prenons un point M de C_3 et menons de ce point la transversale d aux deux droites (AA') et (BB'). La droite d est l'axe de l'involution.

Pour obtenir le point correspondant d'un point X donné, il suffit de rechercher le troisième point d'intersection Y du plan (dX) avec la cubique gauche.

Remarquons que ces constructions ont encore lieu quand les deux couples donnés sont composés de points imaginaires conjugués, puisque, dans ce cas, les droites (AA') et (BB') sont toujours réelles.

Le point M est quelconque; il existe par conséquent une infinité d'axes pour une même involution. Ces axes forment le système des génératrices d'une surface réglée du second ordre. En effet, les axes que l'on peut mener par les différents points de C_3 s'appuient à la fois sur trois droites, qui unissent trois couples quelconques A, A'; B, B'; C, C' de l'involution; ces axes sont donc les génératrices de la surface réglée du second ordre, qui a ces trois droites (AA'), (BB'), (CC') pour directrices. Nous voyons, de plus, que les droites qui unissent les couples de l'involution sont les directrices de la surface réglée. Nous pourrons donc énoncer les deux théorèmes suivants :

Les plans tangents d'une surface du second ordre contenant une cubique gauche, menés le long d'une génératrice, marquent sur cette courbe des couples en involution.

Les droites qui unissent les points de couples en involution, représentés sur une cubique gauche, sont les directrices d'une surface réglée du second ordre.

6. Deux droites x et y, rencontrant C_3 en X et Y, définissent les axes de deux involutions. On peut construire facilement la droite qui unit le couple commun à ces deux involutions.

En effet, soient d_1 et d_2 les droites qui unissent deux couples quelconques de l'involution (x); f_1 et f_2 les droites qui unissent deux couples de l'involution (y). Du point X, menons la transversale z, commune aux deux droites f_1 et f_2, et du point Y, menons la transversale z_1, commune aux deux droites d_1 et d_2. Les plans (xz) et (yz_1) se coupent en une droite d, qui unit le couple de points communs aux deux involutions (x) et (y).

7. En général, nous pouvons construire des couples en involution sur une courbe normale de l'espace à n dimensions, en faisant usage de la représentation suivante :

Les espaces à n — 1 *dimensions, qui passent par un espace fixe à* n — 2 *dimensions, rencontrant une courbe normale* Cn *de l'espace à* n *dimensions en* n — 2 *points, marquent sur cette courbe des couples de points formant une involution.* Nous appellerons l'espace fixe, *l'espace axial de l'involution.*

Étant donnés deux couples d'une involution, AA′, BB′, nous pouvons, d'une $n-2^{\text{uple}}$ infinité de manières, construire son espace axial. En effet, $n-2$ points arbitraires de la courbe Cn, joints aux deux couples de points AA′ et BB′, donnent lieu à deux espaces à $n-1$ dimensions, qui se coupent suivant l'espace axial de l'involution. L'espace à $n-1$ dimensions, qui unit un point quelconque X à l'espace axial, coupe la courbe en un $n^{\text{ième}}$ point Y, qui est le correspondant du point X.

III

1. Lemme. — Soient deux involutions I et I′, dont les équations symboliques sont

$$a_{x1}a_{x2}=0,\quad b_{x1}b_{x2}=0.$$

A un élément X_1, de paramètre $(x1_1,\ x1_2)$, il correspond dans I un élément X_2, dont le paramètre $(x2_1, x2_2)$ est relié au paramètre de X_1 par la condition

$$\frac{x2_1}{x2_2}=-\frac{a_1x1_1+a_2x1_2}{a_0x1_1+a_1x1_2};$$

A cet élément X_2 il correspond un élément X_3 dans I′; si $(x3_1, x3_2)$ est le paramètre de cet élément, on a

$$\frac{x3_1}{x3_2} = -\frac{b_1 x2_1 + b_2 x2_2}{b_0 x2_1 + b_1 x2_2},$$

ou bien

$$\frac{x3_1}{x3_2} = -\frac{x1_1(a_1b_1 - a_0b_2) + x1_2(a_2b_1 - a_1b_2)}{x1_1(a_1b_0 - a_0b_1) + x1_2(a_2b_0 - a_1b_1)}.$$

En développant, nous obtenons

$$\begin{aligned} & x1_1x3_1(a_1b_0 - a_0b_1) + x1_2x3_1(a_2b_0 - a_1b_1) \\ + & x1_1x3_2(a_1b_1 - a_0b_2) + x1_2x3_2(a_2b_1 - a_1b_2) = 0. \end{aligned}$$

Entre les éléments X_1 et X_3, il existe une correspondance que nous appellerons *résultante* des deux involutions I et I′. En interprétant l'équation de cette résultante, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

La résultante de deux involutions est une homographie (*).

La résultante de deux involutions est une involution quand les involutions composantes satisfont à la condition

$$a_2b_0 - 2a_1b_1 + a_0b_2 = 0.$$

Cette condition est remplie, quand les points principaux des deux involutions sont réciproquement polaires par rapport à la courbe normale du plan où elles sont représentées.

Si, dans l'équation de la résultante de deux involutions, on suppose

$$\frac{x1_1}{x1_2} = \frac{x3_1}{x3_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

on obtient

$$(a_0b_1 - a_1b_0)x_1^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2 = 0.$$

(*) M. *Le Paige,* dans un travail auquel il a bien voulu nous associer, prend ce théorème pour définition des séries homographiques [*Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective* (Bull. de l'Acad. roy. de Belg., février 1888)].

D'après cette équation,

L'homographie résultante de deux involutions a pour éléments unis les deux éléments du couple commun aux deux involutions composantes.

2. On pourrait démontrer analytiquement que toute homographie peut être considérée comme la résultante de deux involutions. Nous nous bornerons à établir, ce qui, du reste, revient au même, qu'étant donnés trois couples d'une homographie nous pouvons construire tous ses couples, en la construisant comme la résultante de deux involutions.

Soient AA', BB', CC' les couples donnés; nous pouvons toujours supposer qu'ils sont des couples de points d'une conique C_2; nous conviendrons que A, B, C sont trois éléments d'une série et que A', B', C' sont les éléments correspondants de l'autre série. Représentons par d et d' les droites qui unissent un point fixe quelconque M de la courbe aux points A et A'. Les droites qui joignent les points M' de la courbe aux points B et B' coupent les droites d et d' en deux séries de points k et k'; ces deux séries sont homographiques; donc (I, 2), les jonctions (kk') enveloppent une courbe de la seconde classe, σ_2. Le point M des deux ponctuelles d et d' se correspond; donc la courbe σ_2 se décompose en deux faisceaux de rayons; le centre de l'un de ces faisceaux est M, le centre du second sera le point P d'intersection des droites (AB') et (A'B). Soit, de même, P' le point de rencontre des droites (AC') et (A'C); la droite (PP') rencontre les deux droites (AM) et (A'M) en deux points Q et Q'. Ces deux points sont les points principaux des deux involutions dont l'homographie cherchée est la résultante. Pour obtenir le point correspondant d'un point D appartenant, par exemple, à la série (ABC), il faut chercher l'intersection M'' de la droite (QD) avec C_2; la droite (M''Q') rencontre C_2 au point D', qui est le point cherché. La droite (QQ') coupe la courbe C_2 en deux points, qui sont les éléments unis de l'homographie. Il résulte de là que, pour construire une homographie, connaissant ses éléments unis et un couple AA', il suffit de prendre, pour les points Q et Q', l'intersection avec la droite des éléments doubles des deux droites MA, MA', M étant un point quelconque de C_2.

Puisque le point M est quelconque dans les deux problèmes que nous venons de résoudre, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une homographie quelconque peut être considérée comme la résultante d'une infinité de couples d'involutions : tous ces couples d'involutions ont en commun un même groupe, qui est le groupe des éléments unis de l'homographie.

3. D'après ce qui précède, si l'on donne trois couples d'une homographie H, on peut déterminer une infinité de couples de points Q, Q', situés sur une droite d, et qui sont les points principaux des couples d'involutions dont la résultante est l'homographie H. Ces couples Q, Q' marquent visiblement sur la droite d deux ponctuelles homographiques; les éléments unis de ces ponctuelles sont l'intersection de la conique-support et de la droite d. Cette remarque nous conduit à la construction, sur une droite d, d'une homographie dont on connaît un couple QQ' de points correspondants et le couple des éléments unis : nous supposerons ce couple formé de deux points imaginaires conjugués, fournis par l'intersection imaginaire d'une conique C_2 avec d. Les droites qui unissent un point quelconque M de C_2 aux deux points Q et Q' marquent sur C_2 deux points A et A'. Pour avoir le point correspondant d'un point Q_1 de d, il suffit de mener Q_1A, qui rencontre C_2 en un point M' : la droite $(M'A')$ coupe la droite d au point cherché Q'_1.

4. Soient deux homographies H et H', placées sur un même support; représentons par A_i, A'_i, ou B_i, B'_i, les couples de ces homographies, selon qu'ils appartiennent à H ou à H'. A un élément A_i, il correspond, dans H, un élément A'_i, et à cet élément A'_i, considéré comme un élément de la série (B'_i), il correspond, dans H', un élément B_i. Inversement, à un élément B_i, il correspond un élément A_i; les couples A_iB_i forment donc les couples d'une homographie H''. Cette homographie H'' possède deux groupes, composés d'éléments coïncidents; nous retrouvons ainsi ce théorème (*) :

Deux séries homographiques superposées possèdent deux couples d'éléments communs.

Les remarques qui nous ont conduit à la démonstration de ce théorème nous fournissent en même temps le moyen de construire les deux couples communs à deux homographies H et H'.

Nous supposons que le support commun est une conique C_2, et que les deux couples de points P, P'; Q, Q' sont les points principaux de deux couples d'involutions dont les résultantes sont H et H'.

Prenons trois points arbitraires, A_1, A_2, A_3, de la courbe C_2. Les droites

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3;\ QA_1,\ QA_2,\ QA_3$$

coupent la conique C_2 respectivement en

$$M_1,\ M_2,\ M_3;\ M'_1,\ M'_2,\ M'_3.$$

Les droites

$$(P'M_1),\ P'M_2),\ (P'M_3);\ (Q'M'_1),\ (Q'M'_2),\ (Q'M'_3)$$

coupent C_2, respectivement aux points

$$B_1,\ B_2,\ B_3;\ B'_1,\ B'_2,\ B'_3.$$

Construisons la droite des éléments doubles de l'homographie caractérisée par les trois couples

$$B_1B'_1;\ B_2B'_2;\ B_3B'_3;$$

cette droite rencontre C_2 en deux points K et K'.

(*) Voir, par exemple, le *Traité de géométrie projective* de M. *Cremona*.

Si M et M′ sont les points d'intersection de la courbe C_2 avec les droites (P′K) et (P′K′), les deux droites (PM), (PM′) coupent C_2 en deux points K et K′. Les deux couples de points KK_1 et $K'K'_1$ sont les deux couples d'éléments communs aux deux homographies H et H′.

5. En interprétant les résultats précédemment établis (I, 5), nous obtenons la propriété suivante :

Soient deux droites x *et* y *rencontrant une cubique gauche en deux points* X *et* Y; *les plans* (Mx) *et* (My), *menés par un point quelconque* M *de la cubique, rencontrent cette courbe en des couples de points* X_i, Y_i, *formant une homographie.*

Étant donnés trois couples, X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3, *d'une homographie, il est possible de déterminer d'une double infinité de manières les droites* x *et* y, *qui la caractérisent.*

Soient, en effet, trois points X, Y, M de la cubique gauche, le troisième, M, étant variable; appelons d_1 et d_2 les droites (MX_1) et (MY_1). Les couples de plans

$$(XX_2\Xi), \quad (YY_2\Xi),$$

Ξ étant un point quelconque de la cubique, coupent les droites d_1 et d_2 en deux séries homographiques quand le point Ξ parcourt la courbe.

D'après un théorème que nous avons rappelé plus haut (I, 2), les jonctions (D_1D_2) enveloppent une courbe de la seconde classe. Or, le point $M \equiv (d_1, d_2)$ se correspond; la courbe se décompose donc en deux faisceaux de rayons. Le centre de l'un de ces faisceaux est M; appelons O_2 le centre du second.

Si nous remplaçons dans ce qui précède le groupe X_2Y_2 par le groupe X_3Y_3, nous obtenons de la même façon un point O_3. La droite (O_2O_3) coupe d_1 et d_2 en A et B. Les deux droites

$$x \equiv (AX), \quad y \equiv (BY)$$

sont les axes des deux involutions dont la résultante contient les trois groupes

$$(X_1Y_1),\ (X_2Y_2),\ (X_3Y_3).$$

Si nous projetons du point X les couples de l'involution définie par (y), nous obtenons une droite (XC); le plan (XAC) rencontre la cubique suivant une bisécante, qui est la droite de jonction des éléments doubles de l'homographie : cela résulte de ce que nous avons vu précédemment.

6. Théorème. — *Étant donnés trois groupes de trois points situés sur une cubique gauche,*

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1;\quad X_2,\ Y_2,\ Z_2;\quad X_3,\ Y_3,\ Z_3,$$

il est toujours possible de trouver un système de trois droites x, y, z, *rencontrant la cubique respectivement en* **X, Y, Z,** *tel que les plans indiqués dans une même ligne horizontale du tableau*

$$(xX_1),\ (yY_1),\ (zZ_1);$$
$$(xX_2),\ (yY_2),\ (zZ_2);$$
$$(xX_3),\ (yY_3),\ (zZ_3)$$

coupent la cubique en un même point.

Supposons la question résolue, et appelons Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 les trois points d'intersection auxquels donnent lieu les plans des trois horizontales du tableau. Les droites x, y représentent les axes de deux involutions I_1 et I_2, qui ont respectivement les couples

$$(X_1\Xi_1),\ (X_2\Xi_2),\ (X_3\Xi_3);$$
$$(Y_1\Xi_1),\ (Y_2\Xi_2),\ (Y_3\Xi_3).$$

D'après ce que nous venons de voir, les trois couples

$$(X_1,\ Y_1);\ (X_2,\ Y_2);\ (X_3,\ Y_3)$$

appartiennent à une homographie; ces trois couples nous permettent de construire cette homographie. Soient D_1, D_2, les deux éléments doubles de cette homographie.

Appelons I_3 l'involution dont l'axe est la droite z. Les deux involutions I_1 et I_3 ont un couple commun D_3, D_4; ce couple est le couple des éléments doubles de l'homographie qui possède les couples

$$(X_1, Z_1); (X_2, Z_2); (X_3, Z_3).$$

De même, I_2 et I_3 ont en commun un groupe D_5, D_6, qui est le couple des éléments doubles de l'homographie possédant les couples

$$(Y_1, Z_1); (Y_2, Z_2); (Y_3, Z_3).$$

Par ce qui précède, nous pouvons construire les couples

$$(D_1, D_2); (D_3, D_4); (D_5, D_6).$$

Pour déterminer les points x, y, z, il suffira de prendre trois points arbitraires X, Y, Z sur la cubique et de mener de ces points les transversales respectivement aux trois couples de droites

$$(D_1D_2), (D_3D_4); (D_1D_2), (D_5D_6); (D_3D_4), (D_5D_6).$$

Nous avons vu que si le point X varie sur la courbe, le lieu de la droite x est le système des génératrices d'une surface réglée du second ordre; la directrice de cette surface, qui passe par X_1, par exemple, rencontre la cubique au point Ξ_1; le point Ξ_1 est donc indépendant de la position du point X. En conséquence, on trouve, pour les trois droites x, y, z, un système triplement infini de déterminations; toutefois, les points Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 seront déterminés d'une façon unique.

Le théorème que nous venons de démontrer nous sera d'une grande utilité dans la suite.

7. On peut encore construire des couples homographiques sur une courbe normale, Cn, de l'espace à n dimensions, en appliquant le théorème suivant (*) :

Soient deux espaces à $n-2$ *dimensions,* E_{n-2} *et* E'_{n-2}, *rencon-*

(*) Nous représentons, en général, par E_k un espace linéaire à k dimensions.

trant une courbe normale C_n, *de l'espace à* n *dimensions, en* n — 2 *points. Les deux espaces à* n — 1 *dimensions, déterminés par les deux espaces* E_{n-2} *et* E'_{n-2} *et un point* M *de* C_n, *coupent cette courbe en des couples de points* X_i *et* Y_i, *formant deux séries homographiques.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la représentation des couples en involution, sur une courbe normale de l'espace à n dimensions. Nous ne croyons pas nécessaire d'indiquer les constructions à effectuer pour construire une homographie dont on connaît trois couples ; elles sont identiques à celles que nous avons indiquées plus haut pour les cas de $n = 2$ et $n = 3$.

IV

1. Le principe de la correspondance entre les éléments de couples en nombre infini a été généralisé par *Chasles* de la façon suivante :

Si, entre deux figures de première espèce, il existe une relation, telle qu'à un élément quelconque de la première figure il corresponde m *éléments de la seconde, et qu'à un élément quelconque de la seconde figure il corresponde* n *éléments de la première,* on dit que ces figures sont reliées par une *correspondance* (m . n). Nous supposons, bien entendu, que, quel que soit l'élément d'un groupe d'une figure, il lui correspond toujours le même groupe d'éléments de l'autre figure.

D'après la définition, si x et y sont les paramètres non homogènes de deux éléments correspondants, il existera entre eux une relation algébrique entière $f(x, y) = 0$, du degré n en x et du degré m en y.

Il peut arriver, si les deux figures sont superposées, qu'à un élément de l'une des figures il corresponde un groupe de l'autre, tel qu'un de ses éléments coïncide avec le premier : ces éléments sont les *coïncidences* de la *correspondance;* si nous supposons, dans l'équation $f(x, y) = 0$, $x = y$, nous obtenons une équation du degré $m+n$, à une inconnue. Nous pourrons donc énoncer ce théorème, connu sous le nom de *principe de correspondance de Chasles :*

Une correspondance (m.n), *placée sur un support unicursal, possède* (m + n) *coïncidences* (*).

Le degré d'une équation reste le même quand on effectue sur ses variables une ou plusieurs transformations linéaires ; par conséquent,

Une transformation projective transforme une correspondance (m.n) *en une autre correspondance* (m.n).

2. Le principe de correspondance a servi de point de départ à *Chasles* pour indiquer la manière de construire des courbes d'ordre quelconque à l'aide de faisceaux de courbes d'ordres moins élevés.

Voici le théorème fondamental sur lequel repose le procédé donné par *Chasles :*

Le lieu de l'intersection des courbes homologues de deux faisceaux homographiques de courbes d'ordre m *et d'ordre* n *est une courbe d'ordre* m + n.

On peut dire que deux faisceaux de courbes sont homographiques quand, à une courbe de l'un des faisceaux, il ne correspond qu'une courbe de l'autre faisceau, et réciproquement.

Cela posé, une droite quelconque rencontre les courbes des deux faisceaux en deux séries de points reliés par une correspondance $(m.n)$. Cette correspondance possède $(m+n)$ coïncidences, qui sont les intersections du lieu cherché avec la droite. Comme cette droite est arbitraire, le lieu est d'ordre $(m+n)$. Il est, de plus, visible que le lieu passe par les points de base des deux faisceaux (**).

On pourrait énoncer de même le théorème corrélatif, qui servirait à la construction des courbes de classe quelconque.

(*) Voir, à ce sujet, les *Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments,* par *Em. Weyr* (Mém. de la Soc. des sc. de Bordeaux, t. X).

(**) *Mélanges de géométrie pure* de M. *de Jonquières,* p. 174.

Voici l'extension de ce théorème pour la géométrie de l'espace :

Le lieu de l'intersection des surfaces homologues appartenant à deux faisceaux homographiques de surfaces d'ordre m *et d'ordre* n, *est une surface d'ordre* m + n, *passant par les éléments de base des deux faisceaux.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle que nous venons de donner.

3. La difficulté, dans ce mode de génération des courbes et des surfaces, consiste à établir géométriquement la correspondance homographique entre les courbes et les surfaces des faisceaux.

Voici une manière d'établir cette correspondance dans le plan :

1° *Soient deux droites fixes* d_1, d_2, *deux points fixes* O_1 *et* O_2 *et un faisceau de rayons de centre* O. *Tout rayon* d *de ce faisceau coupe les droites* d_1 *et* d_2 *en* D_1 *et* D_2; *les droites* (O_1D_1), (O_2D_2) *se rencontrent en un point* M, *dont le lieu est une conique.*

Ce procédé a été donné par *Braikenridge* et *Mac Laurin,* pour la génération des courbes du second ordre.

La conique passe par les points O_1, O_2, (d_1d_2) et les points de rencontre de (O_1O) et d_2 et de (O_2O) et d_1 : cette remarque suffit pour montrer que par le procédé actuel on peut construire une conique dont on connaît cinq points.

2° *Soient deux droites fixes* d_1, d_2, *deux points fixes* O_1, O_2 *et une courbe de la classe* m, σ_m. *Toute tangente* d *de cette courbe rencontre les deux droites* d_1, d_2 *en des points* D_1 *et* D_2; *l'intersection des jonctions* (O_1D_1), (O_2D_2) *est un point* M, *dont le lieu est une courbe d'ordre* 2m, *quand la droite* d *enveloppe la courbe* σ_m.

En effet, soit O_1D_1 un rayon du faisceau O_1; il coupe d_1 en D_1 : par ce point D_1, on peut mener m tangentes à la courbe σ_m. Ces m tangentes rencontrent d_2 en m points D_2, et donnent donc lieu à m rayons O_2D_2. Ainsi, à un rayon O_1D_1 il correspond m rayons

O_2D_2 ; de même, à un rayon O_2D_2 il correspond m rayons O_1D_1. Si nous coupons les rayons des faisceaux O_1 et O_2 par une transversale quelconque, nous obtenons deux séries de points formant une correspondance $(m . m)$. D'après le principe de *Chasles,* cette correspondance possède $2m$ coïncidences, qui sont les points de rencontre de la transversale avec le lieu cherché. Ce lieu est, par conséquent, une courbe d'ordre $2m$, C_{2m}.

Les points O_1, O_2 et (d_1d_2) sont des points m^{uples} de cette courbe; il suffit, pour le faire voir, de remarquer que par chacun des points de rencontre de (O_1O_2) avec d_1 ou d_2, on peut mener m tangentes de σ_m, et qu'à chacune de ces tangentes il correspond le même point O_2 ou O_1 de la courbe C_{2m}. Il en est de même pour le point (d_1d_2).

Les m tangentes, menées à σ_m par le point O_1 ou O_2, rencontrent d_2 ou d_1 en m points qui appartiennent à la courbe.

Il est visible que les m tangentes à la courbe C_{2m} aux points m^{uples} O_1 et O_2, sont les droites (O_1k_1), (O_1k_2), ..., (O_1k_m) et $(O_2k'_1)$, $(O_2k'_2)$, ..., $(O_2k'_m)$; les points $k_1, k_2, ..., k_m$ et $k'_1, k'_2, ..., k'_m$ sont respectivement les points de rencontre avec d_2 et d_1, des m tangentes à σ_m, passant par les points d'intersection de (O_1O_2), respectivement avec d_1 et d_2.

Si la courbe σ_m possède α_1 tangentes multiples d'ordre p_1, α_2 tangentes multiples d'ordre p_2, ..., α_k tangentes multiples d'ordre p_k, la courbe C_{2m} possède, outre ses trois points m^{uples}, α_1 points p_1^{uples}, α_2 points p_2^{uples}, ..., α_k points p_k^{uples}.

Si les droites d_1, d_2, (O_1O_2) étaient des tangentes multiples de σ_m, d'ordres respectifs β_1, β_2, β_3, la courbe C_{2m} se décomposerait en les droites multiples $\{(d_1d_2)O_1\}$, $\{(d_1d_2)O_2\}$ et (O_1O_2), d'ordres de multiplicité respectifs β_1, β_2, β_3, et en une courbe de l'ordre $2m - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, possédant en O_1, O_2 et (d_1d_2) des points multiples d'ordres $m - \beta_2 - \beta_3$, $m - \beta_1 - \beta_3$, $m - \beta_1 - \beta_2$.

Nous pourrons, en résumé, énoncer le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle façon que deux de ses côtés passent par deux points fixes, tandis que le troisième côté reste tangent à une courbe de la classe m *et que les sommets adjacents* *glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une courbe d'ordre* 2m.

On pourrait énoncer de même le théorème corrélatif.

4. En particulier, nous pouvons nous proposer de construire une courbe du quatrième ordre, possédant trois points doubles donnés O_1, O_2, O_3 et passant par cinq points donnés A, B, C, D, E: c'est la courbe rationnelle du quatrième ordre la plus générale. Prenons pour points fixes les points O_1 et O_2, et pour droites fixes les droites (O_3A) et (O_3B). Les jonctions des points C, D, E à O_1 et O_2 déterminent respectivement, par leur intersection avec (O_3A) et (O_3B), des points C_1, D_1, E_1 et C_2, D_2, E_2.

Construisons la courbe de la seconde classe, tangente aux cinq droites

$$(O_1B),\ (O_2A),\ (C_1C_2),\ (D_1D_2),\ (E_1E_2);$$

les tangentes de cette courbe rencontrent (O_3A) et (O_3B) en des points D_1, D_2; les droites qui unissent ces points respectivement à O_1 et O_2 se coupent en un point M, dont le lieu est la courbe cherchée.

5. Proposons-nous encore de construire une courbe rationnelle du troisième ordre, dont on donne le point double O_3, et passant par six points O_1, O_2, A, B, C, D.

Prenons pour points fixes les points O_1 et O_2, et pour droites fixes les droites (O_3A) et (O_3B).

Les droites (O_1C), (O_1D) et (O_2C), (O_2D) rencontrent respectivement (O_3A) et (O_3B) en C_1, D_1 et C_2, D_2. Construisons la courbe de la seconde classe, tangente aux cinq droites

$$(O_1B),\ (O_2A),\ (O_1O_2),\ (C_1C_2),\ (D_1D_2),$$

et achevons les constructions que nous avons indiquées plus haut; nous obtiendrons une couche du quatrième ordre, qui se décompose en la droite O_1O_2 et en la cubique cherchée.

Nous pourrons ainsi énoncer les théorèmes suivants :

Toute courbe rationnelle du quatrième ordre peut être engendrée par le sommet d'un triangle mobile, dont les deux côtés adjacents *passent par deux points fixes, tandis que les deux autres sommets glissent sur deux droites fixes et que le côté opposé reste tangent à une couche de la seconde classe.*

Toute courbe rationnelle du troisième degré peut être engendrée par le sommet d'un triangle mobile, dont les deux autres sommets glissent sur deux droites fixes, tandis que les côtés adjacents passent par deux points fixes dont la jonction ainsi que le troisième côté du triangle mobile enveloppent une même courbe de la seconde classe.

6. Soient, dans l'espace, un cône du degré n, C_n, et deux couples de droites fixes, d_1, d_2 et d_3, d_4. Les deux surfaces réglées du second ordre, engendrées par les droites qui s'appuient sur ces couples de droites fixes et sur un rayon m quelconque du cône, se coupent en une cubique gauche. Si le rayon m décrit le cône, la cubique gauche correspondante décrira une surface dont nous nous proposons de rechercher l'ordre.

Remarquons qu'un point M de l'espace appartiendra à cette surface quand les deux transversales m_{12}, m_{34}, menées de ce point aux deux couples de droites d_1, d_2 et d_3, d_4, rencontrent le cône C_n en deux séries de n points, telles qu'au moins un point de la première série soit situé avec un des points de la seconde série sur un rayon du cône.

Cela posé, la transversale menée d'un point M d'une droite fixe quelconque aux deux droites d_1 et d_2 rencontre le cône C_n en n points. Les n génératrices du cône passant par ces points, jointes aux deux droites fixes d_3, d_4, peuvent être considérées comme les directrices de n surfaces réglées du second ordre. Ces surfaces rencontrent la droite d en n couples de points, et donc en $2n$ points M' : (M'_1, M'_2, ... M'_{2n}). Si un de ces points M' coïncidait avec M, ce serait un point de la surface.

A un point M, il correspond $2n$ points M', et par symétrie à un point M' il correspond $2n$ points M. Entre les points M et M', il existe la correspondance $(2n \,.\, 2n)$, qui possède $4n$ coïncidences : ces coïncidences sont les points de la surface situés sur la droite d. Comme la droite d est quelconque, nous en déduisons que la surface est de l'ordre $4n$, S_{4n}; si nous observons que le cône fait partie du lieu cherché, S_{4n} se décompose en une surface d'ordre $3n$, S_{3n}, et en le cône Cn. De plus, la surface S_{3n} se décompose en une surface cubique n^{uple}.

En effet, si d est une droite quelconque de l'espace, les plans tangents communs aux deux surfaces réglées du second ordre, qui ont pour directrices d_1, d_2, d et d_3, d_4, d, constituent une développable de la troisième classe, puisque ces deux surfaces ont en commun les plans tangents le long de la directrice commune d.

Par le sommet du cône C_n, nous pouvons mener trois plans osculateurs α_1, α_2, α_3 de cette développable : chacun de ces plans osculateurs, α_1, par exemple, coupe le cône suivant n génératrices; les cubiques gauches correspondantes rencontrent évidemment la droite d en n points coïncidents, puisque ces points sont l'intersection de d avec α_1.

Nous pourrons, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle façon que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième côté décrit un cône d'ordre quelconque mais de centre fixe, le sommet opposé décrira une même *surface cubique multiple. L'ordre de multiplicité de cette surface est précisément égal à l'ordre du cône choisi.*

Il est évident que la surface cubique possède comme génératrices rectilignes les droites d_1, d_2, d_3, d_4, ainsi que leurs deux transversales communes d_5, d_6.

7. Désormais, nous supposerons que le cône générateur est du premier degré : les génératrices de ce cône seront ainsi les rayons d'un faisceau plan.

Proposons-nous de construire, en nous servant du théorème que nous venons de démontrer, la surface cubique déterminée par quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 et trois points A_1, A_2, A_3 donnés : c'est la surface la plus générale de l'espèce.

Des points A_1, A_2, A_3, menons les transversales d_1, d'_1; d_2, d'_2; d_3, d'_3 aux couples de droites d_1, d_2 et d_3, d_4. Les trois plans

$(d_1d'_1)$, $(d_2d'_2)$, $(d_3d'_3)$ se coupent en un point O : si nous prenons ce point O comme centre d'un faisceau plan de rayons et si nous achevons les constructions précédemment indiquées, nous obtenons la surface cubique demandée.

Observons que cette surface passera nécessairement par le point d'intersection des jonctions des traces des couples de droites d_1, d_2; d_3, d_4 sur le plan du faisceau choisi, et que cette surface est indépendante du choix du plan du faisceau. Si nous considérons donc tous les plans qui passent par O, le lieu de l'intersection des jonctions des traces des deux couples de droites d_1, d_2 et d_3, d_4 sur ces plans est la surface cubique cherchée. Le point O appartient à la surface : nous pourrons, en faisant usage de cette remarque, construire linéairement autant de points que nous le désirons de la surface, et nous pourrons énoncer, en conséquence, le théorème suivant :

Les plans d'une gerbe marquent sur deux couples de droites fixes des points tels, que l'intersection de leurs jonctions se déplace sur une surface cubique.

En d'autres termes :

Les rayons de deux congruences du premier ordre et de la première classe, qui sont situés dans les plans d'une gerbe, se coupent en des points dont le lieu est une surface cubique.

Nous pourrons énoncer de même les théorèmes corrélatifs :

Les plans des transversales menées à deux couples de droites fixes, par les points d'un plan, enveloppent une surface de la troisième classe.

Les plans des rayons de deux congruences du premier ordre et de la première classe qui passent par les points d'un plan, enveloppent une surface de la troisième classe.

On peut démontrer de même les théorèmes suivants, généralisations des précédents :

Les plans qui enveloppent une surface de la classe m, *marquent sur deux couples de droites fixes des points tels que l'intersection de leurs jonctions se déplace sur une surface de l'ordre* 3m.

Les plans des transversales menées à deux couples de droites fixes par les points d'une surface d'ordre m, *enveloppent une surface de la classe* 3m.

V

1. Lemme I. — Soient trois involutions, définies par les équations

$$f_1 \equiv a_{x1}a_{x2} = a_0 x1_1 x2_1 + a_1(x1_1 x2_2 + x1_2 x2_1) + a_2 x1_2 x2_2 = 0,$$

$$f_2 \equiv b_{x2}b_{x3} = b_0 x2_1 x3_1 + b_1(x2_1 x3_2 + x2_2 x3_1) + b_2 x2_2 x3_2 = 0,$$

$$f_3 \equiv c_{x3}c_{x4} = c_0 x3_1 x4_1 + c_1(x3_1 x4_2 + x3_2 x4_1) + c_2 x3_2 x4_2 = 0.$$

Pour que ces trois involutions aient un couple commun, il faut que leurs points principaux soient en ligne droite. Cette condition peut s'exprimer analytiquement par la relation

$$(ab)(bc)(ca) \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Lemme II. — A un élément X_1, de paramètre $(x1_1, x1_2)$, il correspond dans l'involution définie par $f_1 = 0$ un élément X_2, de paramètre $(x2_1, x2_2)$, et à cet élément X_2 il correspond, dans l'involution définie par $f_2 = 0$, un élément X_3, de paramètre $(x3_1, x3_2)$.

Entre les éléments X_1 et X_3, il existe une relation homographique.

L'équation symbolique qui lie leurs paramètres est

$$a_{x1}b_{x3}(ab) = 0.$$

A l'élément X_3, il correspond, dans l'involution définie par $f_3 = 0$, un élément X_4, de paramètre $(x4_1, x4_2)$. Cet élément X_4 est relié à X_1 par une correspondance homographique dont l'équation est

$$a_{x1}c_{x4}(ab)(bc) = 0.$$

Pour que cette correspondance soit involutive, il faut que l'on ait symboliquement

$$a_1c_2(ab)(bc) = a_2c_1(ab)(bc),$$

ou

$$(ab)(bc)(ca) = 0.$$

Nous pouvons, eu égard au lemme I, interpréter ce résultat de la façon suivante :

La résultante de trois involutions sera une involution, quand ces trois involutions auront un couple commun, c'est-à-dire appartiendront à un faisceau.

Ce théorème exprime en d'autres termes ceci : soient trois involutions I, I′, I″, appartenant à un même faisceau; supposons que les couples de ces trois involutions soient les couples de points d'une même ligne unicursale.

A un point A, il correspond dans I un point B ; à ce point, il correspond dans I′ un point C, auquel correspond dans I″ un point D ; les couples tels que (AD) forment une involution ; c'est-à-dire à D il correspond dans I un point E auquel correspond dans I′ un point F; à ce point F, il correspond dans I″ un point G, qui coïncide avec A.

2. Si la ligne unicursale est une conique, nous obtenons le théorème de Pascal : *Les couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit à une courbe du second degré se coupent en trois points situés en ligne droite.*

Si la ligne unicursale est une cubique gauche, on a cette propriété :

Les transversales menées de trois points d'une cubique gauche aux couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit, s'appuient sur une même bisécante de la courbe.

Quand les trois points de la cubique coïncident, on retrouve ce théorème connu (*) :

Les transversales menées d'un point d'une cubique gauche aux couples de côtés d'un hexagone inscrit, sont dans un même plan.

En général, si nous nous rapportons à la représentation des couples en involution sur une courbe normale, C_n, de l'espace à n dimensions, nous aurons cette propriété :

Les espaces à n — 2 *dimensions, menés par trois groupes de*

(*) Nous pensons que ce théorème est dû à *Chasles*. Voir l'*Aperçu historique*, p. 403.

$n-2$ *points d'une courbe normale de l'espace à* n *dimensions et s'appuyant respectivement sur les couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit, rencontrent une même bisécante de cette courbe.*

Si les trois groupes de $n-2$ points coïncident, le théorème se transforme en le suivant :

Les espaces à $n-2$ *dimensions, menés par* $n-2$ *points fixes d'une courbe normale, et s'appuyant sur les couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit, sont situés dans un même espace à* $n-1$ *dimensions.*

3. En joignant deux à deux $n+4$ points, $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$, d'une courbe normale, C_n, de l'espace à n dimensions E_n, on obtient divers polygones.

Choisissons, par exemple, le polygone dont les sommets successifs sont :

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n+3}, A_{n+4};$$

$n+2$ sommets successifs,

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2},$$

peuvent s'associer de trois manières n à n, de façon à former les trois faces à $n-1$ dimensions successives

$$E_{n-1} \equiv (A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n \quad),$$
$$E'_{n-1} \equiv (A_2A_3 \ldots A_n \quad A_{n+1}),$$
$$E''_{n-1} \equiv (A_3A_4 \ldots A_{n+1}A_{n+2}).$$

Appelons ces faces *adjacentes,* parce qu'elles se coupent suivant la face à $n-3$ dimensions déterminée par les sommets consécutifs

$$A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}, A_n.$$

Nous dirons, d'autre part, que les trois droites

$$(A_{n+2}A_{n+3}), (A_{n+3}A_{n+4}), (A_{n+4}A_1)$$

sont les arêtes opposées à ces faces.

Eu égard à ces considérations, le théorème établi au paragraphe précédent peut s'énoncer ainsi :

Trois faces adjacentes à n — 1 *dimensions d'un polygone de* n — 4 *sommets, inscrit à une courbe normale de l'espace à* n *dimensions, rencontrent les arêtes opposées en trois points situés, avec l'intersection de ces trois faces, dans un même espace à* n — 1 *dimensions.*

Une courbe normale est déterminée par $n+3$ de ses points; le théorème précédent exprime la liaison qui doit exister entre $n+4$ points de l'espace à n dimensions, pour qu'ils soient situés sur une même courbe normale. Nous allons montrer qu'il n'est pas nécessaire, pour que $n+4$ points soient situés sur une courbe normale, que la propriété énoncée ait lieu pour toutes les combinaisons des trois faces adjacentes à $n-1$ dimensions d'un polygone formé par ces $n+4$ points.

4. On peut définir une courbe normale à n dimensions comme l'intersection de $n-1$ espaces à $n-1$ dimensions du second ordre, ayant en commun un espace générateur linéaire à $n-2$ dimensions; on peut même supposer que ces espaces sont des cônes du second degré (*).

Soient $n+4$ points de l'espace à n dimensions; considérons ces points comme étant les sommets successifs B_1, B_2, ..., B_{n+3}, B_{n+4}, d'un polygone.

Supposons que les trois faces à $n-1$ dimensions de ce polygone,

$$\begin{aligned} E_{n-1} &\equiv (B_1B_2 \dots B_{n-1}B_n \quad), \\ E'_{n-1} &\equiv (B_2B_3 \dots B_n \quad B_{n+1}), \\ E''_{n-1} &\equiv (B_3B_4 \dots B_{n+1}B_{n+2}), \end{aligned}$$

(*) Nous appelons *cône du second degré*, dans un espace à n dimensions, un système simplement infini d'espaces à $n-2$ dimensions, E_{n-2}, passant par un espace à $n-3$ dimensions, E_{n-3}, que nous désignerons sous le nom d'*espace du sommet*, et tel que dans un espace à $n-1$ dimensions quelconque passant par E_{n-3}, il ne se trouve que deux espaces E_{n-2}. Un tel cône est coupé par un plan, ne rencontrant pas E_{n-3}, suivant une conique; par conséquent, un cône du second degré est déterminé par cinq de ses espaces générateurs.

rencontrent les arêtes opposées

$$(B_{n+2}B_{n+3}),\ (B_{n+3}B_{n+4}),\ (B_{n+4}B_1)$$

en trois points B, B′, B″, situés dans un même espace à $n-1$ dimensions E''_{n-1}, avec la face

$$E_{n-3} \equiv (B_3B_4 \dots B_{n-1}B_n).$$

Les $n+4$ points donnés sont, dans cette supposition, situés sur un cône du second ordre dont l'espace du sommet est E_{n-3}. Projetons en effet les six points

$$B_1,\ B_2,\ B_{n+1},\ B_{n+2},\ B_{n+3},\ B_{n+4}$$

de l'espace E_{n-3} sur un plan quelconque, ne rencontrant pas E_{n-3} : nous obtenons six points,

$$B'_1,\ B'_2,\ B'_{n+1},\ B'_{n+2},\ B'_{n+3},\ B'_{n+4};$$

les couples de côtés opposés

$$(B'_1, B'_2),\ (B'_{n+2}, B'_{n+3});\ (B'_1, B'_{n+1}),\ (B'_{n+3}, B'_{n+4});\ (B'_{n+1}, B'_{n+2}),\ (B'_{n+4}, B_2)$$

se coupent en trois points situés sur une droite : cette droite est l'intersection du plan choisi et de l'espace E'''_{n-1}.

Nous en déduisons que les six points

$$B'_1,\ B'_2,\ B'_{n+1},\ B'_{n+2},\ B'_{n+3},\ B'_{n+4}$$

sont sur une même courbe du second degré; c'est ce qui démontre le théorème énoncé.

Si nous supposons que la propriété du polygone relative à la face E_{n-3}, a lieu pour $n-2$ autres faces adjacentes (c'est-à-dire pour $n-2$ autres faces à $n-3$ dimensions situées, avec E_{n-3}, dans une même face à $n-2$ dimensions, E_{n-2}), les $n+4$ points $B_1, B_2, \dots, B_{n+3}, B_{n+4}$ seront situés sur $n-1$ cônes du second degré, ayant en commun l'espace générateur E_{n-2}; ces points seront, par conséquent, situés sur la courbe normale d'ordre n, leur intersection.

Nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant :

Quand, dans un polygone de n + 4 *sommets, situés dans un espace à* n *dimensions, trois faces à* n — 1 *dimensions, passant par une même face à* n — 3 *dimensions,* E_{n-3}, *rencontrent les arêtes opposées en trois points situés, avec* E_{n-3}, *dans un même espace à* n — 1 *dimensions, et si cette propriété est vérifiée pour les espaces à* n — 3 *dimensions situés dans une même face à* n — 2 *dimensions, les sommets du polygone seront situés sur une même courbe normale.*

La propriété sera alors indépendante de la face du polygone et de l'ordre dans lequel on considère les sommets successifs du polygone.

5. Ces considérations permettent de construire la courbe normale de l'espace à n dimensions, connaissant $n + 3$ points qui lui appartiennent, A_1, A_2, ..., A_{n+2}, A_{n+3}.

Par $n - 1$ points, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, faisons passer un espace quelconque à $n - 1$ dimensions, E_{n-1}; considérons un des n — 1 espaces à $n - 3$ dimensions, formés en joignant n — 2 points parmi A_1, A_2, ..., A_{n-1}, par exemple l'espace

$$E_{n-3} \equiv (A_1 A_2 \dots A_{n-2}).$$

Si, de E_{n-3}, nous projetons les cinq points

$$A_{n-1},\ A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2},\ A_{n+3}$$

sur un plan quelconque, non situé dans E_{n-3}, nous obtenons cinq points

$$B_{n-1},\ B_n,\ B_{n+1},\ B_{n+2},\ B_{n+3};$$

d'autre part, l'espace E_{n-1} se projette sur le plan choisi suivant une droite, b, passant par B_{n-1}.

Les cinq points

$$B_{n-1},\ B_n,\ B_{n+1},\ B_{n+2},\ B_{n+3}$$

déterminent une conique ; nous pourrons, par des constructions connues, déterminer le second point d'intersection, B, de cette conique avec la droite b; soit E_{n-2} l'espace à n — 2 dimensions qui unit E_{n-3} et B.

Les n — 1 espaces semblables à E_{n-3}, provenant des n — 1 combinaisons de points A_1, A_2, ..., A_{n-1}, pris n — 2 à n — 2, donnent lieu à n — 1 espaces analogues à E_{n-2}; ces n — 1 espaces sont situés dans E_{n-1}; ils se coupent donc en un point A, qui appartiendra à la courbe normale déterminée par les $n+3$ points donnés.

Addition.

Avant d'aborder le second chapitre de notre travail, il nous semble nécessaire de rappeler brièvement quelques propriétés analytiques des courbes normales.

Dans un espace à un nombre n de dimensions, et pour un système de référence déterminé, il existe évidemment une seule courbe d'ordre n, dont les équations sont

$$\rho x_1 = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n}, \quad \rho x_2 = \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_2^{n-1}}, \quad \ldots, \quad \rho x_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \rho x_{n+1} = 1.$$

M. *Véronèse* (*) a démontré que, étant donnée une courbe d'ordre n, de l'espace à n dimensions, il est toujours possible de déterminer un système de référence tel que les équations de cette courbe soient celles que nous venons d'écrire.

Soient

$$(\lambda 1_1 \lambda 1_2),\ (\lambda 2_1 \lambda 2_2),\ \ldots,\ (\lambda n_1 \lambda n_2),$$

les paramètres homogènes de n points d'une courbe normale; l'équation de l'espace à n — 1 dimensions qui unit ces points est (**)

$$z_1 - z_2 P_1^{(n)} + z_3 P_2^{(n)} + \cdots \pm z_{n+1} P_n^{(n)} = 0$$

(le signe $\pm$, selon que n est pair ou non).

(*) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Mathematische Annalen, Bd. XIX).

(**) Voir notre travail intitulé : *Sur la représentation des involutions unicursales* (Bull. de l'Acad. roy. de Belg., 3e série, t. XIV).

En général, nous désignons par $P_k^{(q)}$ la somme de tous les produits k à k des q quantités $\frac{\lambda i_1}{\lambda i_2}$ $(i = 1, 2, 3, ..., q)$.

Les équations de l'espace à $k - 1$ dimensions qui unit k points de cette courbe, seront :

$$\left.\begin{array}{l} K_0 \equiv z_1 - z_2 P_1^{(k)} + z_3 P_2^{(k)} - \cdots \pm z_{k+1} P_k^{(k)} = 0, \\ K_1 \equiv z_2 - z_3 P_1^{(k)} + z_4 P_2^{(k)} - \cdots \pm z_{k+2} P_k^{(k)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n-k} \equiv z_{n-k+1} - z_{n-k+2} P_1^{(k)} + \cdots \pm z_{n+1} P_k^{(k)} = 0 \end{array}\right\}$$

(le signe $\pm$, selon que k est pair ou impair).

Il suit de là que l'espace à $n - 1$ dimensions, osculateur à une courbe normale au point de paramètre $\frac{\lambda 1}{\lambda 2}$, a pour équation

$$z_1\lambda_2^n - \binom{n}{1} z_2\lambda_2^{n-1}\lambda_1 + \binom{n}{2} z_3\lambda_2^{n-2}z_1^2 - \cdots \mp z_n \binom{n}{1} \lambda_2\lambda_1^{n-1} \pm z_{n+1}\lambda_1^n = 0,$$

et que l'espace à $k - 1$ dimensions, osculateur en ce même point, a pour équations :

$$\left.\begin{array}{r} z_1\lambda_2^k - \binom{k}{1} z_2\lambda_2^{k-1}\lambda_1 + \cdots \pm z_{k+1}\lambda_1^k = 0, \\ z_2\lambda_2^k - \binom{1}{k} z_3\lambda_2^{k-1}\lambda_1 + \cdots \pm z_{k+2}\lambda_1^k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-k+1}\lambda_2^k - \binom{k}{1} z_{n-k+2}\lambda_2^{k-1}\lambda_1 + \cdots \pm z_{n+1}\lambda_1^k = 0. \end{array}\right\}$$

Il résulte de ce qui précède *que d'un point* A, *situé en dehors d'une courbe normale de l'espace à* n *dimensions, on peut mener à cette courbe* n *espaces à* n — 1 *dimensions, osculateurs.* L'espace à $n - 1$ dimensions, qui unit les points de contact, est *l'espace polaire* du point A. Si les coordonnées homogènes de ce point sont proportionnelles aux quantités

$$a_1, a_2, .., a_n, a_{n+1},$$

l'équation de son espace polaire sera

$$a_{n+1}z_1 - \binom{n}{1} a_n z_2 + \cdots \mp \binom{n}{1} a_2 z_n \pm a_1 z_{n+1} = 0.$$

Réciproquement, étant donné un espace plan à $n - 1$ dimensions, dont l'équation est

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 \ldots + b_{n+1} z_{n+1} = 0,$$

l'intersection des n plans à $n - 1$ dimensions, osculateurs aux points où cet espace rencontre la courbe normale, se coupent en un point dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{\dfrac{z_1}{b_{n+1}}}{\binom{n}{0}} = - \frac{\dfrac{z_2}{b_n}}{\binom{n}{1}} = \cdots = \pm \frac{\dfrac{z_{n+1}}{b_1}}{\binom{n}{n}}.$$

Ce point est appelé *pôle de l'espace à* n — 1 *dimensions*.

On peut déduire de ces équations le théorème suivant :

Dans un espace à un nombre impair de dimensions, le pôle d'un espace à n — 1 *dimensions par rapport à une courbe normale, est situé dans cet espace, et réciproquement.*

Un espace à k dimensions, E_k, pouvant être considéré comme la jonction de $k + 1$ points de l'espace à n dimensions, l'intersection de $k + 1$ espaces à $n - 1$ dimensions polaires de ces $k + 1$ points par rapport à la courbe normale, sera un espace à $n - k - 1$ dimensions, E_{n-k-1}, appelé *espace polaire* de E_k. On peut démontrer que tout point de E_k a pour espace polaire un espace à $n - 1$ dimensions passant par E_{n-k-1}, et réciproquement, et que tout espace à $n - 1$ dimensions, passant par E_k, a son pôle situé sur E_{n-k-1}, et inversement. On déduit de là que l'espace polaire de E_{n-k-1} est précisément l'espace E_k. On pourrait trouver facilement, à l'aide des résultats obtenus précédemment, les équations de deux espaces polaires par rapport à une courbe normale.

CHAPITRE II.

I

On peut généraliser la conception de l'homographie entre les éléments de deux figures de première espèce en l'étendant à la correspondance entre les éléments de n figures.

1. Définition. — *Nous dirons que* n *figures de première espèce forment une homographie d'ordre* n *et de rang* n — 1 *quand* n — 1 *éléments, pris arbitrairement dans* n — 1 *de ces figures, déterminent sans ambiguïté un élément de la figure restante* (*).

Nous représentons cette correspondance par la notation H^n_{n-1}.

D'après la définition, si nous désignons par

$$(x1_1,\ x1_2),\ (x2_1,\ x2_2),\ \ldots,\ (xn_1,\ xn_2)$$

les paramètres homogènes de n éléments correspondants, il est clair que ces paramètres doivent être reliés par une équation d'ordre total n et linéaire par rapport à chacun d'eux. L'équation sera donc une forme n-linéaire égalée à zéro ; nous l'écrirons symboliquement :

$$f \equiv a^{(1)}_{x1} a^{(2)}_{x2} \ldots a^{(n)}_{xn} \equiv b^{(1)}_{x1} b^{(2)}_{x2} \ldots b^{(n)}_{xn} \equiv \cdots = 0;$$

ou bien, sous forme explicite :

$$f = \sum a_{ikl\ldots m} x1_i x2_k x3_l \ldots xn_m = 0,$$

i, k, l, m prenant les valeurs numériques 1 et 2.

(*) Voir le Mémoire de M. *Le Paige,* intitulé : *Homographies et involutions des ordres supérieurs* (Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, année 1883, pp. 27 et suivantes).

En particulier, si les divers éléments des groupes d'une H^n_{n-1} sont permutables, c'est-à-dire, par exemple, si les divers éléments des n séries sont de même espèce et sur un même support, et si les éléments des groupes peuvent être considérés comme appartenant à l'une ou l'autre série, sans que pour cela les groupes soient altérés, nous dirons que de pareils groupes forment une *involution d'ordre* n *et de rang* n — 1. Nous représenterons cette correspondance par I^n_{n-1}.

L'équation qui représente une telle involution doit être symétrique par rapport aux paramètres des divers éléments : ce sera donc une forme n-linéaire symétrique égalée à zéro,

$$f \equiv a_{x1}a_{x2} \ldots a_{xn} \equiv b_{x1}b_{x2} \ldots b_{xn} \equiv \cdots = 0.$$

Si nous désignons par $P_i^{(k)}$ la somme des produits i à i des k quantités

$$\frac{x1_1}{x1_2}, \quad \frac{x2_1}{x2_2}, \quad \ldots, \quad \frac{xk_1}{xk_2},$$

l'équation pourra s'écrire, sous forme effective,

$$f = \sum_0^n a_i P^{(n)}_{n-i} = 0\,;$$

nous ferons usage de cette équation pour étudier les propriétés de l'involution.

2. Si les éléments des mêmes séries de deux homographies sont situés sur les mêmes supports, nous dirons que l'ensemble des groupes communs à ces deux corrélations forment une *homographie d'ordre* n *et de rang* n — 2. Plus généralement, nous dirons que *l'ensemble des groupes de* n *éléments, communs à* n — k *homographies d'ordre* n *et de rang* n — 1, *forme une homographie d'ordre* n *et de rang* k, *que nous représenterons par la notation* H^n_k.

Nous définirons de même une involution d'ordre n et de rang k, I^n_k, comme l'ensemble des groupes communs à $n - k$ involutions, I^n_{n-1}.

Une H^n_k, ou une I^n_k, sera définie par l'égalité à zéro de $n - k$ formes n-linéaires, non symétriques ou symétriques.

Nous commencerons par étudier l'involution générale en nous servant d'un procédé de représentation qui semble offrir quelque avantage : 1° parce qu'il permet de présenter les différentes propriétés de cette correspondance sous une forme qui fait image; 2° parce que, dans certains cas, il nous permet d'arriver à des résultats nouveaux, qu'il serait peut-être difficile d'obtenir par une autre voie.

La théorie de l'involution nous permettra, au moins dans des cas intéressants, de faire la théorie de l'homographie; c'est pourquoi, bien que cela puisse paraître contraire à la logique, nous avons préféré étudier le cas particulier avant le cas général.

II

1. Soit une involution d'ordre n et de rang $n-1$, représentée par l'équation

$$f = a_0 P_n^{(n)} + a_1 P_{n-1}^{(n)} + \cdots + a_{n-1} P_1^{(n)} + a_n = 0.$$

A cette involution, associons le point de l'espace à n dimensions dont les coordonnées, dans un système de référence déterminé, sont proportionnelles aux coefficients

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

Nous dirons que ce point est le *point principal* de l'involution.

Si l'involution est décomposable en n éléments fixes, ce qui a lieu quand la forme f est un produit de n facteurs linéaires, il existe entre les coordonnées de son point principal les relations

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

d'où l'on déduit

$$\rho a_0 = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n}, \quad \rho a_1 = \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_2^{n-1}}, \quad \ldots, \quad \rho a_{n-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \rho a_n = 1,$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Le lieu des points qui représentent les points principaux des involutions d'ordre n *et de rang* n — 1, *décomposables en* n *éléments fixes, est la courbe normale de l'espace à* n *dimensions.*

Cela posé, tout espace à $n-1$ dimensions passant par le point principal d'une involution, définie par $f=0$, a pour équation :

$$\mu_1(x_1 a_n - x_{n+1}a_0) + \mu_2(x_2 a_{n-1} - x_{n+1}a_1) + \cdots + \mu_n(x_n a_n - x_{n+1}a_{n-1}) = 0,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des paramètres à déterminer par la position de cet espace.

Les espaces représentés par cette équation coupent la courbe normale en des séries de n points, dont les paramètres homogènes (λ_1, λ_2) vérifient la relation

$$\lambda_1^n \mu_1 a_n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2\mu_2 a_n + \cdots + \lambda_1\lambda_2^{n-1}\mu_n a_n$$
$$- \left\{ a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + \cdots + a_{n-1}\mu_{n-3} \right\} \lambda_2^n = 0.$$

Désignons par

$$-\frac{\lambda 1_2}{\lambda 1_1}, \quad -\frac{\lambda 2_2}{\lambda 2_1}, \quad \ldots, \quad -\frac{\lambda n_2}{\lambda n_1}$$

les racines de la dernière équation et convenons de représenter par $(-1)^i Q_i^{(n)}$ la somme des produits i à i des inverses de ces racines ; nous aurons

$$Q_1^{(n)} = -\frac{a_n\mu_n}{a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + \cdots + a_{n-1}\mu_n},$$

$$Q_2^{(n)} = -\frac{a_n\mu_{n-1}}{a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + \cdots + a_{n-1}\mu_n},$$

$$Q_n^{(n)} = -\frac{a_n\mu_1}{a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + \cdots + a_{n-1}\mu_n}.$$

Si nous éliminons entre ces relations les paramètres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, nous obtenons :

$$a_0 Q_n^{(n)} + a_1 Q_{n-1}^{(n)} + \cdots + a_{n-2}Q_2^{(n)} + a_{n-1}Q_1^{(n)} + a_n = 0.$$

Ainsi, *les groupes de* n *points d'intersection forment une involution* I^n_{n-1}, *et la relation qui caractérise cette involution est précisément celle qui est représentée par le point principal en question.* Ces groupes de n points sont, par conséquent, *les images* des groupes de l'involution proposée.

2. D'un autre côté, un point de l'espace à n dimensions peut être considéré comme étant l'intersection de n espaces à n dimensions, dont les équations sont, par exemple :

$$\begin{aligned}
A1_x &= A1_1x_1 + A1_2x_2 + \cdots + A1_nx_n + A1_{n+1}x_{n+1} = 0,\\
A2_x &= A2_1x_1 + A2_2x_2 + \cdots + A2_nx_n + A2_{n+1}x_{n+1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
An_x &= An_1x_1 + An_2x_2 + \cdots + An_nx_n + An_{n+1}x_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Tout espace passant par ce point aura alors pour équation :

$$A_x = \mu_1 A1_x + \mu_2 A2_x + \cdots + \mu_n An_x = 0,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des paramètres arbitraires.

Chacun des espaces représentés par cette équation, où les paramètres μ ont des valeurs déterminées, coupe la courbe normale en des groupes de n points dont les paramètres homogènes (λ_1, λ_2) sont les racines de l'équation

$$A^n_\lambda = \mu_1 A1^n_\lambda + \mu_2 A2^n_\lambda + \cdots + \mu_n An^n_\lambda = 0;$$

les notations Ai^n_λ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ désignent des formes binaires d'ordre n, ayant pour expressions effectives

$$Ai^n_\lambda = Ai_1\lambda_1^n + Ai_2\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + Ai_n\lambda_1\lambda_2^{n-1} + Ai_{n+1}\lambda_2^n.$$

Il résulte de là *que l'on peut représenter analytiquement une involution d'ordre* n *et de rang* n — 1 *par l'équation d'un faisceau, d'ordre* n — 1, *de formes binaires d'ordre* n.

Nous pouvons, du reste, démontrer directement cette propriété.

Soit, en effet, l'équation d'un faisceau de formes d'ordre n

$$f \equiv \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0,$$

et supposons données $n - 1$ racines de cette équation, chacune de ces racines représentant le paramètre d'un élément d'une figure de première espèce.

En substituant ces racines dans l'équation, nous pouvons déterminer, à l'aide d'équations linéaires, les rapports des n paramètres λ_i.

En substituant les valeurs ainsi obtenues dans l'équation $f = 0$, nous aurons une équation d'ordre n bien déterminée; $n - 1$ des racines de cette équation sont celles qui ont servi à déterminer les rapports des paramètres λ; la $n^{ième}$ racine sera proportionnelle au paramètre de l'élément complétant le groupe déterminé par les $n - 1$ éléments donnés. Cette détermination se fera en résolvant une équation linéaire.

3. De ces deux façons d'arriver à la représentation d'une involution I_n^{n-1}, en partant de l'équation qui la caractérise, il résulte que, réciproquement, étant donné le point principal d'une involution, on peut trouver immédiatement son équation sous l'une ou l'autre de ses formes.

Une involution I_{n-1}^n étant déterminée par la position de son point principal, il suit qu'elle est complètement définie par n groupes de n éléments, à condition toutefois que ces groupes soient indépendants entre eux.

En effet, nous pouvons supposer que les n éléments de chaque groupe soient représentés par n points d'une même courbe normale de l'espace à n dimensions; l'espace à $n - 1$ dimensions qui unira ces n points pourra donc définir complètement le groupe. Les n espaces semblables correspondants aux n groupes se coupent en un point qui est le point principal de l'involution.

Si les n groupes ne sont pas indépendants entre eux, les

n espaces correspondants, au lieu de se couper en un point, se couperont en un espace linéaire qui aura au moins une dimension; par conséquent, il existera au moins une simple infinité de points principaux qui représenteront l'involution possédant les groupes donnés.

4. Une involution d'ordre n et de rang k, I_k^n, est, par définition, l'ensemble des groupes de n éléments communs à $n - k$ involutions d'ordre n et de rang $n - 1$; soient

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-k},$$

les points principaux de ces $n - k$ involutions, représentées dans l'espace à n dimensions : nous dirons que l'ensemble de ces $n - k$ points forme *l'espace principal* de l'involution I_k^n. Or, $n - k$ points de l'espace à n dimensions déterminent par leurs jonctions un espace à $n - k - 1$ dimensions, E_{n-k-1}; par conséquent, l'espace principal d'une involution I_k^n sera un espace à $n - k - 1$ dimensions.

D'après les propriétés dont jouissent les points principaux des $n - k$ involutions I_{n-1}^n, dont I_k^n est pour ainsi dire l'intersection, nous voyons que tous les espaces à $n - 1$ dimensions, qui passent par l'espace principal E_{n-k-1} d'une I_k^n, marquent sur la courbe normale des groupes de n points qui sont les images des groupes de cette involution.

Théorème. — *Un groupe de* n *éléments d'une* I_k^n *est déterminé par* k *éléments quelconques de ce groupe.*

En effet, k points quelconques pris sur la courbe normale, joints à l'espace principal E_{n-k-1} de l'involution, forment un espace à $n - 1$ dimensions, rencontrant la courbe normale en n points : k de ces points sont les k points pris à l'avance. On voit de plus que la position de l'espace à $n - 1$ dimensions ainsi déterminé ne dépend pas du choix de k points donnés; il en est donc de même du groupe de ses n points d'intersection avec la courbe normale.

L'espace principal E_{n-k-1} d'une involution I_k^n étant un espace à $n-k-1$ dimensions, sera déterminé par l'intersection de $k+1$ espaces à $n-1$ dimensions; nous en déduisons qu'une I_k^n est définie complètement par $k+1$ de ses groupes, indépendants entre eux.

Soient

$$A1_x = 0,\ A2_x = 0,\ \ldots,\ A\overline{k+1}_x = 0,$$

les équations de $k+1$ espaces à $n-1$ dimensions qui se coupent en un espace à $n-k-1$ dimensions, espace principal d'une involution I_k^n. Tout espace à $n-1$ dimensions passant par cet espace aura pour équation :

$$A_x = \mu_1 A1_x + \mu_2 A2_x + \cdots + \mu_{k+1} A\overline{k+1}_x = 0,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k+1}$ étant des paramètres arbitraires.

Cette équation représente un faisceau d'ordre k d'espaces à n — 1 dimensions; les espaces de ce faisceau rencontrent la courbe normale en des groupes de n points, dont les paramètres homogènes λ_1, λ_2 vérifient la relation

$$A_\lambda^n = \mu_1 A1_\lambda^n + \mu_2 A2_\lambda^n + \cdots + \mu_{k+1} A\overline{k+1}_\lambda^n = 0.$$

La forme Ai_λ^n $(i = 1, 2, 3, \ldots, k+1)$ a, comme précédemment, pour expression effective

$$Ai_\lambda^n = Ai_1\lambda_1^n + Ai_2\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + Ai_n\lambda_1\lambda_2^{n-1} + Ai_{n+1}\lambda_2^n.$$

Nous pouvons donc représenter analytiquement une involution I_k^n par l'équation d'un faisceau, d'ordre k, de formes binaires du degré n :

$$f = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_{k+1} f_{k+1} = 0.$$

Nous pouvons, du reste, le démontrer directement : supposons données k racines de l'équation $f=0$, ces k racines représentant les paramètres de k éléments d'une figure unicursale; en substituant ces k racines, nous obtiendrons k équations linéaires, suffisantes pour déterminer les $k+1$ paramètres homogènes

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k+1}.$$

Si nous transportons les valeurs ainsi obtenues dans l'équation $f=0$, nous obtenons une équation d'ordre n; k racines de cette équation sont les k racines données; les $n-k$ racines restantes complètent le groupe de n éléments déterminé par les k éléments donnés; de plus, ce groupe est indépendant du choix des k éléments déterminatifs, pourvu qu'ils fassent partie de ce groupe.

5. Nous venons de voir qu'une involution I_k^n peut être représentée analytiquement de deux façons : soit par $n-k$ formes n-linéaires symétriques égalées à zéro,

$$f_1 = a1_{x1} . a1_{x2} \ldots a1_{xn} = 0,$$

$$f_2 = a2_{x1} . a2_{x2} \ldots a2_{xn} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_{n-k} = \overline{an-k}_{x1} . \overline{an-k}_{x2} \ldots \overline{an-k}_{xn} = 0,$$

(l'espace principal est alors la jonction de $n-k$ points); soit par les racines d'équations d'ordre n appartenant à un faisceau d'ordre k :

$$f = \mu_1 a1_x^n + \mu_2 a2_x^n + \cdots + \mu_{k+1} \overline{ak+1}_x^n = 0$$

$$(ai_x^n \equiv ai_1 x1^n + ai_2 x1^{n-1} x2 + \cdots + ai_{n+1} x2^n);$$

(l'espace principal est alors l'intersection de $k+1$ espaces à $n-1$ dimensions).

Recherchons comment on peut passer d'un système de représentation à l'autre.

Supposons d'abord l'involution définie par l'égalité à zéro de $n-k$ formes n-linéaires symétriques.

Son espace principal sera la jonction de $n - k$ points, dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$ai_0,\ ai_1,\ ai_2,\ \ldots,\ ai_{n-1},\ ai_n,\ (i = 1, 2, 3, \ldots, n-k).$$

L'espace à $n - k - 1$ dimensions qu'il déterminera sera l'axe d'un faisceau d'ordre k d'espaces à $n - 1$ dimensions; l'équation de ce faisceau sera :

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} \lambda i \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-k} & z_{n-k+i} \\ a1_0 & a1 & \ldots & a1_{n-k-1} & a1_{n-k+i-1} \\ a2_0 & a2_1 & \ldots & a2_{n-k-1} & a2_{n-k+i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{an-k}_0 & \overline{an-k}_1 & \ldots & \overline{an-k}_{n-k-1} & \overline{an-k}_{n-k+i-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Les espaces de ce faisceau rencontrent la courbe normale en des groupes de n points, qui sont les groupes de l'involution; les paramètres des éléments de ces groupes sont donc les racines de l'équation à k indéterminées :

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} \lambda i \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1}\lambda_2 & \ldots & \lambda_1^{k+1}\lambda_2^{n-k-1} & \lambda_1^{k-i+1}\lambda_2^{n-k+i-1} \\ a1_0 & a1_1 & \ldots & a1_{n-k+1} & a1_{n-k+i-1} \\ a2_0 & a2_1 & \ldots & a2_{n-k-1} & a2_{n-k+i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{an-k}_0 & \overline{an-k}_1 & \ldots & \overline{an-k}_{n-k-1} & \overline{an-k}_{n-k+i-1} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Soit maintenant une involution I_k^n, définie par l'équation d'un faisceau d'ordre k de formes binaires d'ordre n,

$$f = \mu_1 a1_x^n + \mu_2 a2_x^n + \cdots + \mu_{k+1} \overline{ak+1}_x^n = 0;$$

l'espace principal de cette involution est l'intersection des $k - 1$ espaces à $n - 1$ dimensions, dont les équations sont

$$ai_x \equiv ai_0 x_1 + ai_1 x_2 + \cdots + ai_n x_{n+1} = 0,$$

i prenant les valeurs $1, 2, 3, \ldots k + 1$.

Si nous désignons par $\alpha_{k+2}, \alpha_{k+3}, \ldots \alpha_n$, $n - k$ paramètres, nous pourrons écrire les équations d'un point quelconque de l'espace principal sous la forme :

$$x_1 = -\frac{\sum\limits_{p=2}^{n-k+1} \alpha_{k+p}(a1_{k+p},\, a2_2,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+1})}{(a1_1,\, a2_2,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+1})} = \frac{\sum\limits_{2}^{n-k+1} \alpha_{k+p} A_1^{(p-1)}}{B_{k+1}},$$

$$x_2 = -\frac{\sum\limits_{p=2}^{n-k+1} \alpha_{k+p}(a1_1,\, a2_{k+p},\, a3_3,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+1})}{(a1_1,\, a2_2,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+1})} = \frac{\sum\limits_{2}^{n-k+1} \alpha_{k+p} A_2^{(p-1)}}{B_{k+1}},$$

. . . .

$$x_{k+1} = -\frac{\sum\limits_{p=2}^{n-k+1} \alpha_{k+p}(a1_1,\, a2_2,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+p})}{(a1_1,\, a2_2,\, \ldots,\, \overline{ak+1}_{k+1})} = \frac{\sum\limits_{2}^{n-k+1} \alpha_{k+p} A_{k+1}^{(p-1)}}{B_{k+1}},$$

$$x_{k+2} = \alpha_{k+2},$$

. . . . .

$$x_{n+1} = \alpha_{n+1}.$$

Les $A_i^{(p-1)}$ et B_{k+1} sont des déterminants d'ordre $k+1$ (*).

Ce point définit une involution I^n_{n-1}, qui a pour équation

$$\begin{aligned}
&\{ \alpha_{k+2}A_1^{(1)} + \alpha_{k+3}A_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{n+1}A_1^{(n-k)} \} P_n^{(n)} + \\
&\{ \alpha_{k+2}A_2^{(1)} + \alpha_{k+3}A_2^{(2)} + \cdots + \alpha_{n+1}A_2^{(n-k)} \} P_{n-1}^{(n)} + \cdots + \\
&\{ \alpha_{k+2}A_{k+1}^{(1)} + \alpha_{k+3}A_{k+1}^{(2)} + \cdots + \alpha_{n+1}A_{k+1}^{(n-k)} \} P_{n-k}^{(n)} - \\
&\{ \alpha_{k+2}P_{n-k-1}^{(n)} + \alpha_{k+3}P_{n-k-2}^{(n)} + \cdots + \alpha_{n+1}P_0^{(n)} \} B_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Les symboles $P_i^{(n)}$ représentent les mêmes abréviations que précédemment (II, 1, 1).

Nous pouvons encore écrire l'équation de cette involution sous la forme

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k+2} \{ A_1^{(1)} P_n^{(n)} + A_2^{(1)} P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(1)} P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_{n-k-1}^{(n)} \} + \\
&\alpha_{k+3} \{ A_1^{(2)} P_n^{(n)} + A_2^{(2)} P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(2)} P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_{n-k-2}^{(n)} \} + \\
&\quad \cdots \\
&\alpha_{n+1} \{ A_1^{(n-k)}P_n^{(n)} + A_2^{(n-k)}P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(n-k)}P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_0^{(n)} \} = 0.
\end{aligned}$$

(*) Nous ne croyons pas nécessaire de développer l'expression de ces déterminants.

Si nous considérons tous les points de l'espace principal, il leur correspond un faisceau d'ordre $n - k$, d'involutions I^n_{n-1}. Les groupes de base de ce faisceau sont les groupes de l'involution I^n_k; cette involution pourra donc se représenter par les $n - k$ équations n-linéaires symétriques suivantes :

$$\begin{array}{l}
A_1^{(1)}\ P_n^{(n)} + A_2^{(1)}\ P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(1)}\ P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_{n-k-1}^{(n)} = 0,\\
A_1^{(2)}\ P_n^{(n)} + A_2^{(2)}\ P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(2)}\ P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_{n-k-2}^{(n)} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_1^{(n-k)}P_n^{(n)} + A_2^{(n-k)}P_{n-1}^{(n)} + \cdots + A_{k+1}^{(n-k)}P_{n-k}^{(n)} - B_{k+1}P_0^{(n)} \quad = 0.
\end{array}$$

7. Nous pouvons encore représenter dans l'espace à n dimensions, une involution I^n_{n-1} d'une autre manière. Associons pour cela à une involution I^n_{n-1} l'espace à $n - 1$ dimensions, E_{n-1}, dont les coordonnées sont proportionnelles aux coefficients de l'équation d'involution; en d'autres termes, à l'involution dont l'équation est

$$a_0 P_n^{(n)} + a_1 P_{n-1}^{(n)} + \cdots + a_n P_0^{(n)} = 0,$$

associons l'espace à $n - 1$ dimensions, dont l'équation est

$$a_n x_1 - \binom{n}{1} a_{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_{n-2} x_3 - \cdots \pm \binom{n}{n} a_0 x_{n+1} = 0.$$

Nous appellerons cet espace, *espace complémentaire* de l'involution.

Il résulte immédiatement de la forme de l'équation de cet espace, qu'il est l'espace polaire du point principal de l'involution pour un même système de référence et par rapport à la courbe normale de ce système.

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits précédemment nous conduisent à ce résultat : *si des divers points de l'espace complémentaire d'une involution* I^n_{n-1}, *on mène les groupes de* n *espaces à* n — 1 *dimensions osculateurs à la courbe normale, les groupes des* n *points de contact sont en involution* I^n_{n-1}; *l'équation qui caractérise cette involution est précisément celle que représente l'espace complémentaire.*

Comme conséquence, une involution I_k^n sera représentée dans un espace à n dimensions par l'intersection de $n-k$ espaces à $n-1$ dimensions; chacun de ces espaces est l'espace complémentaire de chacune des $n-k$ involutions I_{n-1}^n, dont I_k^n est l'intersection.

Ces $n-k$ espaces se coupent en un espace à k dimensions, que nous appellerons *espace complémentaire* de I_k^n. Si des divers points de cet espace nous menons les groupes de n espaces osculateurs à la courbe normale, les groupes de points de contact seront les images des groupes de l'involution; de même que pour une involution I_{n-1}^n, l'espace principal et l'espace complémentaire d'une I_k^n sont, pour un même système de référence, réciproquement polaires par rapport à la courbe normale de ce système.

8. Nous pouvons encore représenter une involution I_k^n sur la courbe normale d'un espace à $\mu = n + m$ dimensions de la façon suivante :

Prenons sur cette courbe m points quelconques,

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

et faisons passer par ces points un espace à $\mu - k - 1$ dimensions, $E_{\mu-k-1}$.

Tous les espaces à $\mu - 1$ dimensions qui passent par $E_{\mu-k-1}$, marquent sur la courbe des séries de n points, différents des m points Ai ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) qui forment les groupes d'une I_k^n. En effet, k points tout à fait arbitraires de la courbe, joints à l'espace $E_{\mu-k-1}$, déterminent un espace à $\mu - 1$ dimensions, qui rencontre la courbe en μ points dont m sont les points Ai et dont k sont les points pris arbitrairement; de plus les rôles des n points d'un groupe, différents des m points Ai, sont interchangeables sans que pour cela le groupe soit altéré.

Réciproquement, on peut représenter ainsi une involution I_k^n dont on connaît $k+1$ groupes de n points. En effet, chacun de ces groupes joints à m points fixes quelconques de la courbe, détermine un espace à $\mu - 1$ dimensions; les $k+1$ espaces obtenus de cette façon se coupent en un espace à $\mu - k - 1$ dimensions, rencontrant la courbe en m points. Cet espace définira donc, comme nous venons de le voir, l'involution I_k^n caractérisée par les $k + 1$ groupes donnés. Cette détermination est possible d'une m^{uple} infinité de manières.

Nous appellerons l'espace $E_{\mu-k-1}$, *espace axial* de l'involution I_k^n, représentée sur la courbe normale de l'espace à $\mu = n + m$ dimensions.

Nous pourrons, comme conséquences de ce qui précède, énoncer les théorèmes suivants :

Les espaces à $n - 1$ *dimensions,* n *fois sécants d'une courbe normale* C_μ *de l'espace à* $\mu = n + m$ *dimensions, qui rencontrent un espace à* $\mu - k - 1$ *dimensions,* $E_{\mu-k-1}$, m *fois sécant de* C_μ, *en un espace à* $n - k - 1$ *dimensions marquent sur cette courbe* C_μ *des groupes de* n *points formant un* I_k^n.

Il existe une m^{uple} infinité d'espaces $E_{\mu-k-1}$ jouissant de la même propriété pour une même involution I_k^n.

Dans une involution I_k^n *à un groupe de* k' *éléments* $(k' < k)$, *il correspond des groupes de* $n - k$ *éléments formant une* $I_{k-k'}^{n-k'}$.

De notre procédé de représentation il résulte que pour étudier les propriétés de l'involution, il suffit d'étudier les propriétés des courbes normales des espaces linéaires. Ce n'est pas généralement à ce point de vue que nous nous placerons dans la suite de ce travail.

Nous nous servirons de notre mode de représentation pour transformer la recherche de certaines propriétés de l'involution en d'autres plus faciles à obtenir; comme corollaires, nous en déduirons des propriétés des courbes normales, et ainsi notre manière de représenter les involutions nous servira à deux fins.

III

Éléments multiples.

1. En général, k points d'une courbe normale C_n de l'espace à n dimensions, support d'une I_k^n, joints à l'espace principal, E_{n-k-1}, de l'involution, déterminent un espace à $n-1$ dimensions, E_{n-1}, qui rencontre la courbe en $n-k$ autres points complétant le groupe défini par les k points donnés. La même chose aura encore lieu si ces k points coïncident en un même point A; alors E_{n-1} est la jonction de E_{n-k-1} avec l'espace à $k-1$ dimensions osculateur à la courbe C_n au point A. Il existe une infinité d'espaces à $k-1$ dimensions osculateurs à C_n; donc, une I_k^n possède une infinité de groupes contenant k éléments coïncidents; si nous assujettissons ces groupes à une condition supplémentaire, il n'en existera qu'un nombre limité. La condition à laquelle nous les soumettons, c'est que l'un des $n-k$ points complétant le groupe déterminé par k points, coïncidents en un point A, soit précisément ce point A; en d'autres termes, nous recherchons ici le nombre des groupes d'une I_k^n qui contiennent $k+1$ éléments coïncidents.

En général, nous désignerons par U_l^m le nombre des groupes contenant $l+1$ éléments coïncidents d'une I_l^m.

L'espace à $k-1$ dimensions, osculateur à C_n en un point A, joint à l'espace principal E_{n-k-1} d'une involution I_k^n, détermine un espace E_{n-1}, qui rencontre C_n en $n-k$ autres points (B),

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-k}.$$

Si un de ces points coïncidait avec A, il ferait partie avec A d'un des groupes cherchés : à un point A, il correspond ainsi $n-k$ points B.

A un point B, il correspond, dans I_k^n, des groupes de $n-1$ éléments formant une I_{k-1}^{n-1}; cette involution possède U_{k-1}^{n-1} groupes contenant k éléments coïncidents en un élément A; si un de ces éléments A coïncidait avec B, il ferait partie avec lui d'un des groupes cherchés.

Entre les points A et B de la courbe C_n, il existe la correspondance $\{(n - k), U_{k-1}^{n-1}\}$; le nombre des coïncidences est précisément U_k^n; donc,

$$U_k^n = (n - k) + U_{k-1}^{n-1};$$

remplaçons successivement dans cette relation k et n par $k - 1$, $k - 2, \ldots 1$, et $n - 1, n - 2, \ldots n - k + 1$, et ajoutons membre à membre les égalités obtenues, nous aurons :

$$U_k^n = (n - k)k + U_0^{n-k}.$$

U_0^{n-k} est le nombre des éléments d'une I_0^{n-k}; or, une I_0^{n-k} représente $n - k$ éléments fixes, donc $U_0^{n-k} = (n - k)$; finalement,

$$U_k^n = (n - k)(k + 1) \text{ (*)}.$$

Nous pouvons énoncer ainsi le théorème suivant :

Une involution I_k^n *possède* (n — k) (k + 1) *groupes contenant un élément multiple d'ordre* (k + 1).

2. En particulier, une involution I_{n-1}^n possède n groupes composés de n éléments coïncidents : ces n éléments coïncidents sont représentés sur la courbe C_n par les points de contact des n espaces osculateurs à cette courbe, menés par le point principal de l'involution.

L'espace à $n - 1$ dimensions qui unit ces points de contact est donc l'espace polaire du point principal de l'involution; nous avons vu que l'espace polaire d'un point quelconque d'un espace à un nombre impair de dimensions passe par ce point.

Nous pouvons, en conséquence, énoncer cette propriété :

Le groupe des éléments unis d'une involution d'ordre n *et de rang* n — 1, *quand* n *est impair, fait partie de cette involution.*

(*) Emil Weyr, *Ueber Involutionen* n^ten *Grades und* k^ter *Stufe* (Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, LXXIX, II).

3. M. *Lerch* a généralisé les propriétés des groupes contenant un élément multiple, en recherchant le nombre des groupes qui contiennent deux ou plusieurs éléments multiples associés.

A r_1 éléments il correspond dans une involution I_k^n, des groupes de $n - r_1$ éléments formant une $I_{k-r_1}^{n-r_1}$; cette involution possède des groupes de $n - r_1$ éléments contenant un élément $(k - r_1 + 1)^{\text{uple}}$, en nombre fini; d'après ce que nous venons de voir, ce nombre est $(n - k)(k - r_1 + 1)$.

Cette propriété aura encore lieu quand les r_1 points donnés coïncident en un seul A; comme ce point A peut être quelconque, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Une involution $\mathrm{I}_\mathrm{k}^\mathrm{n}$ *possède des groupes composés de deux points multiples associés, l'un donné d'ordre* r_1 *et l'autre d'ordre* $\mathrm{r}_2 + 1$, $(\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 = \mathrm{k})$, *et de* $\mathrm{n} - \mathrm{k} - 1$ *autres points simples,* B_i, *en nombre* $(\mathrm{n} - \mathrm{k})(\mathrm{r}_2 + 1)$.

Il existe donc une infinité de groupes semblables; il en résulte qu'il n'en existera qu'un nombre fini, satisfaisant à la condition qu'un des éléments B_i coïncide avec l'élément $r_1{}^{uple}$, A.

Comme nous venons de le voir, à un élément A il correspond

$$(n - k)(r_2 + 1)(n - k - 1)$$

éléments B.

A un élément B, il correspond dans I_k^n des groupes de $n - 1$ éléments, formant une I_{k-1}^{n-1}; cette involution possède des groupes en nombre fini $N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1)$, contenant deux points multiples associés, l'un A, d'ordre r_1, et l'autre d'ordre $r_2 + 1$ (nous représentons par la notation $N_l^m(a_1 a_2)$ le nombre des groupes d'une I_l^m qui contiennent deux éléments multiples associés d'ordre a_1 et d'ordre a_2); ainsi, à un élément B il correspond $N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1)$ éléments A.

Entre les éléments A et B, il existe la correspondance

$$\left\{ (n - k)(r_2 + 1)(n - k - 1),\ N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1) \right\}.$$

Le nombre des coïncidences est le nombre cherché; donc,

$$N_k^n(r_1 + 1,\ r_2 + 1) = (n - k)(n - k - 1)(r_2 + 1) + N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1).$$

Remplaçons dans cette formule k et n par $k-1, \ldots k-r_1+1$; $n-1, \ldots, n-r_1+1$; nous aurons la suite de relations :

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1 \,.\, r_2+1) = (n-k)(n-k-1)(r_2+1) + N_{k-2}^{n-2}(r_1-1 \,.\, r_2+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_{k-r_1+1}^{n-r_1+1}(2 \,.\, r_2+1) = (n-k)(n-k-1)(r_2+1) + N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2+1).$$

$N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2+1)$ est le nombre des groupes d'une $I_{k-r_1}^{n-r_1}$ ou $I_{r_2}^{n-r_1}$, qui contiennent un élément $(r_2+1)^{\text{uple}}$, un élément simple et $n-r_1-r_2-2$ autres éléments simples ; donc

$$N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2+1) = (r_2+1)(n-r_1-r_2)(n-r_1-r_2-1)$$
$$= (r_2+1)(n-k)(n-k-1).$$

En additionnant membre à membre les formules de la suite précédente, et en tenant compte de la valeur de $N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2+1)$, nous aurons

$$N_k^n(r_1+1 \ \ r_2+1) = (n-k)(n-k-1)(r_1+1)(r_2+1).$$

Conséquemment :

Une involution $\mathrm{I}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}$ *possède* $2!\binom{\mathrm{n}-\mathrm{k}}{2}(\mathrm{r}_1+1)(\mathrm{r}_2+1)$ *groupes contenant deux éléments multiples, l'un d'ordre* r_1+1, *l'autre d'ordre* r_2+1, *quand on a la condition* $\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2=\mathrm{k}$.

4. Supposons que nous ayons déterminé par un procédé quelconque le nombre des groupes d'une I_k^n, contenant q points multiples associés, quand la somme des ordres de multiplicité est égale au rang k augmenté de q. Connaissant ce nombre, quels que soient n, k et les indices de multiplicité, nous nous proposons de rechercher le nombre des groupes d'une involution quelconque, qui contiennent $q+1$ éléments multiples associés d'ordres respectifs

$$r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}+1,$$

quand on a la condition

$$\sum^{q+1} r_i = k$$

Prenons un élément A quelconque du support de l'involution I_k^n, et considérons-le comme un élément $r_{q+1}$$^{\text{uple}}$; il lui correspond dans I_k^n des groupes de $n - r_{q+1}$ éléments, formant une $I_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}$; cette involution possède des groupes composés de q éléments multiples associés, d'ordres respectifs

$$r_1 + 1,\ r_2 + 1,\ \ldots,\ r_q + 1,$$

en nombre fini

$$N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1 + 1,\ r_2 + 1,\ \ldots,\ r_q + 1)\ (^*),$$

puisque

$$\sum^q r_i = k - r_{q+1};$$

chacun de ces groupes contient de plus $n - k - q$ éléments simples B.

Si un de ces éléments B coïncide avec A, nous aurons un des groupes cherchés.

A un élément A, il correspond donc

$$\alpha = N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1 + 1,\ r_2 + 1,\ \ldots,\ r_q + 1) \times (n - k - q)$$

éléments B.

A un élément B, il correspond dans I_k^n des groupes de $n - 1$ éléments formant une I_{k-1}^{n-1}, qui possède des groupes contenant $q + 1$ éléments multiples associés, d'ordres respectifs

$$r_1 + 1,\ r_2 + 1,\ \ldots,\ r_q + 1,\ r_{q+1},$$

en nombre fini

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1 + 1,\ r_2 + 1,\ \ldots,\ r_q + 1,\ r_{q+1}),$$

puisque

$$\sum^q r_i + r_{q+1} - 1 = k - 1.$$

(*) Nous représentons, comme précédemment, par la notation

$$N_l^m(r_1 + 1\,.\,r_2 + 1,\ \ldots,\ r_\mu + 1)$$

le nombre des groupes d'une involution I_e^m, qui contiennent μ éléments multiples associés d'ordres $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$.

L'élément r_{q+1}^uple de chacun de ces groupes est un élément A; à un élément B, il correspond donc

$$\beta = N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1})$$

éléments A.

Entre les éléments A et B, il existe la correspondance $(\alpha.\beta)$; le nombre des coïncidences est le nombre des groupes cherchés; donc,

$$\begin{aligned} &N_k^n(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}+1) \\ &= N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1)\times(n-k-q) \\ &+ N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}). \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $k-r_{q+1}$ par $\Sigma^q r_i$ et $n-r_{q+1}$ par $n-k+\Sigma^q r_i$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_k^n(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}+1) &= N_{\Sigma^q r_i}^{n-k+\Sigma^q r_i}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1) \\ &\times(n-k-q) + N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}). \end{aligned}$$

Nous aurons de même la suite de relations :

$$\begin{aligned} N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}) &= N_{\Sigma^q r_i}^{n-k+\Sigma^q r_i}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1) \\ &\times(n-k-q) + N_{k-2}^{n-2}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}-1), \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} N_{k-r_{q+1}+1}^{n-r_{q+1}+1}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ 2) &= N_{\Sigma^q r_i}^{n-k+\Sigma^q r_i}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1) \\ &\times(n-k-q) + N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ 1). \end{aligned}$$

Or, $N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}$ est le nombre des groupes d'une involution $I_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}$ qui contiennent $q+1$ éléments multiples d'ordres respectifs

$$r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ 1;$$

ce nombre est

$$\begin{aligned} &N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ 1) \\ &= N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1)\times(n-k-q). \end{aligned}$$

En tenant compte de cette relation et de la suite d'équations indiquée plus haut, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & N_k^n(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_q+1, r_{q+1}+1) \\ = & (r_{q+1}+1)(n-k-q)\, N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_{q-1}+1, r_q+1). \end{aligned}$$

De même nous aurons :

$$\begin{aligned} & N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_q+1) \\ = & (r_q+1)(n-k-q+1)\, N_{k-r_q-r_{q+1}}^{n-r_q-r_{q+1}}(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_{q-1}+1), \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} & N_{k-r_3-r_4\ldots r_{q+1}}^{n-r_3-r_4\ldots r_{q+1}}(r_1+1, r_2+1) \\ = & (r_2+1)(n-k-1)\, N_{k-r_2-\cdots-r_{q+1}}^{n-r_2-\cdots-r_{q+1}}(r_1+1). \end{aligned}$$

Or,

$$N_{k-r_2-\cdots-r_{q+1}}^{n-r_2-\cdots-r_{q+1}}(r_1+1) = (n-k)(r_1+1);$$

donc, en combinant par multiplication les formules précédentes, nous obtenons définitivement :

$$N_k^n(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_q+1, r_{q+1}+1) = \binom{n-k}{q+1} \times (q+1)! \prod_1^{q+1}(r_i+1).$$

Nous pouvons ainsi énoncer la propriété suivante :

Le nombre des groupes d'une involution I_k^n, *contenant* ρ *éléments multiples associés d'ordres respectifs* r_1+1, r_2+1, ..., $r_\rho+1$, *quand on a*

$$\sum r_i = k,$$

est

$$\binom{n-k}{\rho} \rho! \prod_1^{\rho}(r_i+1).$$

Si $r_1 = r_2 = \cdots = \cdots r_\rho = r$, alors les groupes cherchés sont ceux qui contiennent ρ éléments multiples du même ordre; chacun des groupes est compté dans le nombre $\binom{n-k}{\rho}\rho\,!\,(r+1)^\rho$, autant de fois que l'on peut permuter entre eux ρ éléments.

Donc, *le nombre des groupes d'une involution* I^n_k, *qui contiennent* ρ *éléments multiples associés du même ordre* $r+1$, *quand on a* $r\rho = k$, *est* $\binom{n-k}{\rho}(r_1+1)^\rho$ (*).

5. Comme généralisation des propriétés que nous venons d'étudier, il est important de signaler une extension du *principe de correspondance de* Chasles.

Soient n figures de première espèce, telles qu'à $n-1$ éléments $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n$, appartenant respectivement à $n-1$ figures, il corresponde α_i éléments A_i de la $i^{ème}$ figure, et que la même propriété ait lieu quelle que soit la $i^{ème}$ figure restante ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$); nous dirons que ces n figures forment une correspondance

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Si les éléments des n figures sont situés sur un même support, il existe des groupes composés d'éléments coïncidents en nombre fini.

C'est ce nombre que nous nous proposons de rechercher.

Nous représenterons en général par la notation $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, le nombre des coïncidences d'une correspondance $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. A un élément A_1 de la première série, il correspond dans les figures restantes des groupes d'éléments en nombre $n-2$ fois infini, et formant une correspondance $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$; en effet, à $n-2$ éléments $A_2, A_3 \ldots A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$, appartenant à $n-2$ figures restantes, il correspond α_j éléments A_j de la $j^{ième}$ figure, puisque, par hypothèse, à un groupe tel que

$$A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n,$$

il correspond α_j éléments de la $j^{ième}$ figure dans la correspondance proposée

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

(*) *Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* (novembre 1885).

Ainsi, les systèmes de $n-1$ éléments qui correspondent à un élément A_1 forment une correspondance $(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, possédant un nombre fini $N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ de coïncidences; appelons B, chacun de ces éléments coïncidents : si un de ces éléments B coïncidait avec l'élément A_1, nous aurions une des coïncidences de la correspondance cherchée. A un élément A_1, il correspond, de cette façon,

$$N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

éléments B.

A un élément B, qui doit être considéré comme $n-1$ éléments coïncidents $A_2, A_3, ..., A_n$, il correspond dans la corrélation $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, α_1 éléments A_1. Entre les éléments A_1 et B, il existe la correspondance

$$\big(\alpha_1, N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)\big).$$

D'après le *principe de Chasles,* il existe $\alpha_1 + N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ coïncidences; ce nombre est exactement le nombre des coïncidences de la correspondance proposée; nous aurons donc :

$$N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 + N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n).$$

Nous obtiendrons de même la suite des relations :

$$N(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) = \alpha_2 + N(\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n),$$
$$N(\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n) = \alpha_3 + N(\alpha_4, \alpha_5, ..., \alpha_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \alpha_{n-1} + \alpha_n,$$

d'où :

$$N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

Une correspondance $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, formée d'éléments superposés, possède $\Sigma^n \alpha_i$ coïncidences.

IV

1. Soient deux involutions du même ordre n et de rangs k_1 et k_2: $I^n_{k_1}$, $I^n_{k_2}$; nous supposons que les éléments de ces involutions sont représentés par les points d'une courbe normale, C_n, de l'espace à n dimensions, et nous convenons de désigner par E_{n-k_1-1} et E_{n-k_2-1} les espaces principaux de ces deux involutions.

Si les deux involutions ont un groupe de n éléments en commun, l'espace à $n-1$ dimensions, qui joint les points représentant les éléments de ce groupe sur C_n, doit passer nécessairement par E_{n-k_1-1} et E_{n-k_2-1} ; cet espace devra passer, en conséquence, par la jonction de E_{n-k_1-1} et E_{n-k_2-1}. Or, la jonction de E_{n-k_1-1} et de E_{n-k_2-1} est un espace à $2n-k_1-k_2-1$ dimensions, $E_{2n-k_1-k_2-1}$; on ne pourra, par ce dernier espace, mener d'espace à $n-1$ dimensions que si l'on a : $2n-k_1-k_2-1 \leqq n-1$, ou $n \leqq k_1+k_2$. S'il en est ainsi, l'espace $E_{2n-k_1-k_2-1}$ peut être considéré comme l'espace principal d'une involution $I^n_{k_1+k_2-n}$, dont tous les groupes appartiendront à la fois à $I^n_{k_1}$ et $I^n_{k_2}$; nous pourrons ainsi énoncer la propriété suivante :

Quand $k_1+k_2 \geqq n$, *deux involutions* $I^n_{k_1}$ *et* $I^n_{k_2}$ *ont en commun les groupes d'une involution d'ordre* n *et de rang* k_1+k_2-n.

Si $k_1+k_2+2 \leqq n$, les deux espaces E_{n-k_1-1} et E_{n-k_2-1} se coupent en un espace à $n-k_1-k_2-2$ dimensions; cet espace définira l'espace principal d'une involution d'orde n et de rang k_1+k_2+1.

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Quand $k_1+k_2+2 \leqq n$, *deux involutions* $I^n_{k_1}$ et $I^n_{k_2}$ *sont comprises dans une même involution d'ordre* n *et de rang* k_1+k_2+1.

Si n était égal à k_1+k_2+1, les deux involutions $I^n_{k_1}$ et $I^n_{k_2}$ ne pourraient avoir ni des groupes de n éléments en commun, ni appartenir à une même involution ; elles ont en commun des groupes composés de moins de n éléments (il en est du reste de même de deux involutions $I^n_{k_1}$ et $I^n_{k_2}$ satisfaisant à la condition

$k_1 + k_2 < n$); dans la suite, nous déterminerons le nombre de ces groupes.

2. Soient deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$, $I_{k_2}^{n_2}$, $n_2 = n_1 + p$; nous supposons que les éléments de ces involutions sont les points d'une courbe normale C_{n_2}, de l'espace à n_2 dimensions, E_{n_2}.

Les groupes de $I_{k_2}^{n_2}$ sont marqués par les points de rencontre avec C_{n_2} des espaces à $n_2 - 1$ dimensions qui passent par un espace $E_{n_2 - k_2 - 1}$, à $n_2 - k_2 - 1$ dimensions, espace principal de $I_{k_2}^{n_2}$; les groupes de $I_{k_1}^{n_1}$ sont marqués par les points de rencontre avec C_{n_2} des espaces à $n_2 - 1$ dimensions qui passent par un espace à $n_2 - k_1 - 1$ dimensions, $E_{n_2 - k_1 - 1}$, p fois sécant de la courbe C_{n_2}; cet espace $E_{n_2 - k_1 - 1}$ est l'espace axial de l'involution $I_{k_1}^{n_1}$, représentée dans l'espace E_{n_2}.

Remarquons que les deux involutions ne peuvent avoir de groupes communs composés de plus de n_1 éléments.

Tout groupe commun de n_1 éléments, s'il en existe, joint à l'espace axial, $E_{n_2 - k_1 - 1}$, donne lieu à un espace $E_{n_2 - 1}$ à $n_2 - 1$ dimensions, qui doit passer par l'espace principal $E_{n_2 - k_2 - 1}$. Cet espace $E_{n_2 - 1}$ doit donc contenir $E_{n_2 - k_1 - 1}$ et $E_{n_2 - k_2 - 1}$, ou être la jonction de $E_{n_2 - k_1 - 1}$ et de $E_{n_2 - k_2 - 1}$; or, la jonction de ces deux espaces est un espace à $2n_2 - k_1 - k_2 - 1$ dimensions, $E_{2n_2 - k_1 - k_2 - 1}$, p fois sécant de la courbe C_{n_2}; nous pourrons considérer cet espace comme étant l'espace axial d'une involution $I_{k_1 + k_2 - n_2}^{n_1}$, représentée dans E_{n_2}, si $n_2 < k_1 + k_2$; en conséquence, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$ *et* $I_{k_2}^{n_2}$ *dont les caractéristiques satisfont aux conditions* $k_1 + k_2 \geqq n_2$, $n_1 \leqq n_2$, *ont en commun les groupes d'une involution d'ordre* n_1 *et de rang* $k_1 + k_2 - n_2$.

3. En général, soient n involutions $I_{k_i}^{n_i}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) d'ordres respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_n$ et de rangs respectifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$: supposons que n_1 et n_n soient le plus petit et le plus grand des ordres de ces involutions.

Si les groupes de ces involutions sont marqués par des groupes de points de la courbe normale C_{n_n} de l'espace à n_n dimensions,

E_{n_n}, ces n involutions seront représentées par n espaces axiaux

$$E_{n_n - k_1 - 1},\quad E_{n_n - k_2 - 1},\quad \ldots,\quad E_{n_n - k_n - 1},$$

respectivement à

$$n_n - k_1 - 1,\quad n_n - k_2 - 1,\quad \ldots,\quad n_n - k_n - 1$$

dimensions, et rencontrant la courbe C_{n_n} respectivement en

$$n_n - n_1,\quad n_n - n_2,\quad \ldots,\quad n_n - n_n$$

points fixes.

D'après ce que nous avons vu quant à la représentation d'une involution sur une courbe normale d'un espace dont le nombre des dimensions est supérieur à l'ordre de l'involution, nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que les points de rencontre des espaces axiaux des n involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ et de la courbe C_{n_n} font partie de $n_n - n_1$ points de rencontre de cette courbe et de l'espace axial de l'involution $I_{k_1}^{n_1}$.

Si les n involutions proposées ont des groupes communs d'éléments, le nombre de ces éléments sera au plus égal à n_1; l'espace à $n_n - 1$ dimensions correspondant à un de ces groupes, s'il en existe, doit contenir ou être la jonction des n espaces axiaux des n involutions. Cette jonction sera un espace à

$$\sum^n n_i - \sum^k k_i + (n_n - n_1) - 1$$

dimensions, rencontrant la courbe Cn_n en $n_n - n_1$ points; si donc

$$\sum^n n_i - \sum^n k_i \leqq n_1,$$

cet espace sera l'espace axial d'une involution d'ordre n_1 et de rang

$$n_1 - \sum^n n_i + \sum^n k_i.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Si n_n *et* n_1 *sont respectivement le plus grand et le plus petit des ordres de* n *involutions,* $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, *et si les caractéristiques de ces* n *involutions satisfont à la condition*

$$\sum^n n_i - \sum^n k_i \leqq n_1,$$

ces n *involutions auront en commun les groupes d'une involution d'ordre* n_1 *et de rang*

$$n_1 - \sum^{n} n_i + \sum^{n} k_i.$$

En particulier, n *involutions* $\mathrm{I}^{\mathrm{n_i}}_{\mathrm{k_i}}$ *dont les rangs satisfont à la condition que leur somme soit égale à la somme de leurs ordres diminuée de l'ordre le plus petit, ont un seul groupe d'éléments en commun; le nombre de ces éléments est égal à l'ordre le moins élevé de ces involutions.*

Pour déduire ce théorème du précédent, il suffit de remarquer qu'une involution $\mathrm{I}^{\mathrm{n_1}}_0$ est un groupe de n_1 éléments fixes, puisque son espace principal dans l'espace à n_1 dimensions est un espace à $n_1 - 1$ dimensions.

Si les conditions indiquées ne sont pas satisfaites, les n involutions jouissent, quant aux groupes d'éléments qu'elles peuvent avoir en commun, d'autres propriétés que nous allons essayer d'établir.

4. Supposons que les éléments des groupes d'une involution $\mathrm{I}^{n_i}_{k_i}$ soient représentés par les points d'une courbe normale quelconque, C_a, d'un espace à un nombre a de dimensions, E_a (le nombre a est tel que l'on ait $a \geqq k_i$).

D'autre part, nous pouvons regarder un groupe de a points de la courbe C_a comme défini par un point A de l'espace E_a. En effet, les a espaces osculateurs, à $a - 1$ dimensions, en chacun des points d'un groupe, se coupent en un point A que nous appellerons *image* du groupe. Réciproquement, un point A de E_a définit un groupe de a points sur C_a; ces points sont les points de contact des a espaces osculateurs à C_a, menés par le point A.

Si nous considérons les systèmes de a points de la courbe C_a, qui appartiennent à des groupes d'une involution $\mathrm{I}^{n_i}_{k_i}$, nous obtenons pour leurs *images* un système k_i fois infini de points A; l'ensemble de ces points sera situé sur un espace à k_i dimensions, H_{k_i}.

Cet espace est d'ordre et de classe bien déterminés par les deux indices n_i et k_i; il possède de plus certaines singularités en relation directe avec ces indices. Nous nous bornerons à signaler l'existence de ces singularités; pour le but que nous poursuivons actuellement, leur étude n'est pas nécessaire. Remarquons encore que cet espace H_{k_i} peut être considéré comme étant l'intersection de $(a - k_i)$ espaces à $(a - 1)$ dimensions, d'ordre, de classe et de singularités bien déterminés par la nature de l'espace H_{k_i}.

Cela posé, soient n involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$; désignons par $H_{k_1}, H_{k_2}, ..., H_{k_n}$, les n espaces correspondants à ces n involutions représentées sur une courbe normale C_a d'un espace à un nombre a de dimensions; le nombre a est choisi de façon à être supérieur ou égal au plus grand des nombres $k_i (i = 1, 2, 3, ..., n)$. Ces n involutions ne peuvent avoir des groupes d'éléments communs en nombre fini, ou, en général, en nombre r fois infini, que si les n espaces $H_{k_i} (i = 1, 2, 3, ..., n)$ ont des points communs en nombre fini, ou si ces espaces se rencontrent en un espace à r dimensions : il faut donc que l'on ait

$$(a - k_1) + (a - k_2) + \cdots + (a - k_n) = a,$$

ou, en général,

$$(a - k_1) + (a - k_2) + \cdots + (a - k_n) = a - r.$$

Nous pouvons encore écrire l'une et l'autre de ces conditions sous la forme

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = (n - 1)\, a,$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = (n - 1)\, a + r.$$

En interprétant ce résultat, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

n *involutions, d'ordres et de rangs quelconques, ne peuvent avoir de groupes d'éléments communs en nombre fini, que si la somme des rangs est un multiple de* n — 1 ; *le facteur de multiplicité est le nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs.*

n *involutions, d'ordres et de rangs quelconques, ne peuvent avoir en commun des groupes d'éléments en nombre* r *fois infini que si la somme des rangs, diminuée du nombre* r, *est un multiple de* n — 1 ; *le facteur de multiplicité est le nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs.*

5. De ces théorèmes, on peut déduire diverses particularités intéressantes :

1° Deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$, $I_{k_2}^{n_2}$ ont toujours des groupes de $k_1 + k_2$ éléments communs en nombre fini : toutefois, $k_1 + k_2$ doit être moindre ou au plus égal au plus petit des nombres n_1 et n_2 ;

2° Deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$, $I_{k_2}^{n_2}$ ont des groupes de $k_1 + k_2 - r$ éléments communs en nombre r fois infini, r étant quelconque ;

3° Trois involutions de rangs k_1, k_2, k_3 n'ont des groupes de $\frac{k_1 + k_2 + k_3}{2}$ éléments communs en nombre fini que si la somme des rangs est un nombre pair ;

4° Trois involutions, du même rang k et d'ordres quelconques, ne peuvent avoir des groupes d'éléments communs en nombre fini que si le nombre k est pair ;

5° En général, m involutions, d'ordres quelconques et du même rang k, ne peuvent avoir des groupes d'éléments communs en nombre fini, que si le nombre k est un multiple de $m - 1$.

V

Les développements qui suivent ont pour objet la recherche des propriétés des groupes communs à un nombre quelconque d'involutions; le problème étant très complexe, sous sommes obligé de commencer par étudier le cas particulier de deux involutions, dans le but de bien éclaircir la méthode suivie dans le cas général.

1. Soient deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$ et $I_{k_2}^{n_2}$; recherchons combien il existe de groupes de $k_1 + k_2$ éléments du support commun à ces deux involutions, qui appartiennent respectivement aux groupes de n_1 éléments de $I_{k_1}^{n_1}$ et en même temps aux groupes de n_2 éléments de $I_{k_2}^{n_2}$.

Nous représentons par la notation $N_{k_i\,k_j}^{n_i\,n_j}$, le nombre des groupes de $k_i + k_j$ éléments communs à deux involutions, $I_{k_i}^{n_i}$ et $I_{k_j}^{n_j}$. Soit A, un élément du support des deux involutions; il lui correspond, dans $I_{k_1}^{n_1}$, des groupes de $n_1 - 1$ éléments formant une $I_{k_1-1}^{n_1-1}$. Cette involution a, en commun avec $I_{k_2}^{n_2}$, des groupes de $k_1 + k_2 - 1$ éléments en nombre fini, $N_{k_1-1\,k_2}^{n_1-1\,n_2}$; à chacun de ces groupes il correspond dans $I_{k_2}^{n_2}$, $n_2 - (k_1 + k_2 - 1)$ éléments B qui complètent dans $I_{k_2}^{n_2}$ le groupe de n_2 éléments, dont fait partie le groupe commun.

Si un des éléments B coïncidait avec A, nous aurions un groupe de $k_1 + k_2$ éléments communs aux deux involutions.

D'autre part, à un élément B il correspond dans $I_{k_2}^{n_2}$ des groupes de $n_2 - 1$ éléments formant une $I_{k_2-1}^{n_2-1}$; cette involution a, en commun avec $I_{k_1}^{n_1}$, des groupes de $k_1 + k_2 - 1$ éléments en nombre fini, $N_{k_1\,k_2-1}^{n_1\,n_2-1}$.

A chacun de ces groupes communs, il correspond $n_1 - k_1 - k_2 + 1$ éléments A, qui complètent dans $I_{k_1}^{n_1}$ le groupe de n_1 éléments dont fait partie ce groupe commun.

Entre les éléments A et B, il existe la correspondance

$$\left(N_{k_1\,k_2-1}^{n_1\,n_2-1}(n_1 - k_1 - k_2 + 1),\quad N_{k_1-1\,k_2}^{n_1-1\,n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 1)\right).$$

D'après le *principe de Chasles,* il existe des coïncidences (AB) en nombre

$$N_{k_1\,k_2-1}^{n_1\,n_2-1}(n_1 - k_1 - k_2 + 1) + N_{k_1-1\,k_2}^{n_1-1\,n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 1);$$

chacun des groupes de $k_1 + k_2$ éléments communs aux deux involutions proposées, absorbe, à cause de la symétrie, $k_1 + k_2$ de ces coïncidences; nous aurons donc la formule générale,

$$N_{k_1\,k_2}^{n_1\,n_2} = \frac{N_{k_1\,k_2-1}^{n_1\,n_2-1}(n_1 - k_1 - k_2 + 1) + N_{k_1-1\,k_2}^{n_1-1\,n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 1)}{k_1 + k_2}.$$

Cette formule donne le nombre $N^{n_1\,n_2}_{k_1\,k_2}$, en fonction du nombre des groupes communs à deux involutions, $I^{n_1}_{k_1}$ et $I^{n_2-1}_{k_2-1}$, et du nombre des groupes communs à deux involutions $I^{n_1-1}_{k_1-1}$ et $I^{n_2}_{k_2}$.

2. *a*) Supposons dans cette formule $k_1 = k_2 = 1$; nous aurons

$$N^{n_1\,n_2}_{1\,1} = \frac{N^{n_1-1\,n_2}_{0\,1}(n_2-1) + N^{n_1\,n_2-1}_{1\,0}(n_1-1)}{2}.$$

Or, $N^{n_1-1\,n_2}_{0\,1}$ est le nombre des élément d'une $I^{n_2}_1$, pris parmi $n_1 - 1$ éléments donnés; ce nombre est donc égal à $n_1 - 1$; de même

$$N^{n_1\,n_2-1}_{1\,0} = (n_2 - 1);$$

finalement, on a

$$N^{n_1\,n_2}_{1\,1} = (n_1-1)(n_2-1).$$

Par conséquent : *deux involutions d'ordres* n_1 *et* n_2 *et du premier rang ont en commun* $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ *couples.*

b) Supposons $k_2 = 1$, nous aurons

$$N^{n_1\,n_2}_{k_1\,1} = \frac{N^{n_1-1\,n_2}_{k_1-1\,1}(n_2-k_1) + (n_1-k_1)\,N^{n_1\,n_2-1}_{k_1\,0}}{k_1+1};$$

$N^{n_1\,n_2-1}_{k_1\,0}$ est le nombre des groupes de k_1 éléments d'une $I^{n_1}_{k_1}$, pris parmi $n_2 - 1$ éléments donnés : ce nombre est égal à $\binom{n_2-1}{k_1}$; donc :

$$N^{n_1\,n_2}_{k_1\,1} = \frac{N^{n_1-1\,n_2}_{k_1-1\,1}(n_2-k_1) + (n_1-k_1)\binom{n_2-1}{k_1}}{k_1+1}.$$

Remplaçons successivement dans cette formule k_1 et n_1 par $k_1 - 1$, $k_1 - 2$, ..., 1 et $n_1 - 1$, $n_1 - 2$, ..., $n_1 - k_1 + 1$; nous aurons la suite de relations :

$$N^{n_1-1\,n_2}_{k_1-1\,1} = \frac{N^{n_1-2\,n_2}_{k_1-2\,1}(n_2-k_1+1) + (n_1-k_1)\binom{n_2-1}{k_1-1}}{k_1},$$

. . . .

$$N^{n_1-k_1+1\,n_2}_{1\,1} = (n_1-k_1)(n_2-1).$$

En sommant cette suite récurrente, nous obtenons :

$$N_{k_1\,1}^{n_1\,n_2} = \binom{n_1 - k_1}{1}\binom{n_2 - 1}{k_1}.$$

c) Supposons $k_2 = 2$; nous aurons :

$$N_{k_1\,2}^{n_1\,n_2} = \frac{N_{k_1-1\,2}^{n_1-1\,n_2}(n_2 - k_1 - 1) + N_{k_1\,1}^{n_1\,n_2-1}(n_1 - k_1 - 1)}{k_1 + 2}.$$

D'après ce que nous venons de voir,

$$N_{k_1\,1}^{n_1\,n_2-1} = \binom{n_2 - 2}{k_1}\binom{n_1 - k_1}{1};$$

donc :

$$N_{k_1\,2}^{n_1\,n_2} = \frac{N_{k_1-1\,2}^{n_1-1\,n_2}(n_2 - k_1 - 1) + 2\binom{n_1 - k_1}{2}\binom{n_2 - 2}{k_1}}{k_1 + 2};$$

de même,

$$N_{k_1-1\,2}^{n_1-1\,n_2} = \frac{N_{k_1-2\,2}^{n_1-2\,n_2}(n_2 - k_1) + 2\binom{n_1 - k_1}{2}\binom{n_2 - 2}{k_1 - 1}}{k_1 + 1},$$

. . . .

$$N_{1\quad 2}^{n_1-k_1+1\,n_2} = \binom{n_1 - k_1}{2}\binom{n_2 - 2}{1}.$$

Finalement, en sommant cette suite, nous trouvons pour le nombre des groupes de $k_1 + 2$ éléments communs à deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$ et $I_2^{n_2}$:

$$N_{k_1\,2}^{n_1\,n_2} = \binom{n_1 - k_1}{2}\binom{n_2 - 2}{k_1}.$$

d) En général, on a :

$$N_{k_1\,k_2}^{n_1\,n_2} = \binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{k_1}.$$

Supposons, en effet, cette formule exacte pour toutes valeurs de n_1, n_2 et k_1, et pour les valeurs de k_2, au plus égales numériquement à $k_2 - 1$; elle aura encore lieu pour la valeur numérique k_2.

Nous avons :

$$N_{k_1\ k_2}^{n_1\ n_2} = \frac{N_{k_1-1\ k_2}^{n_1-1\ n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 1) + N_{k_1\ k_2-1}^{n_1\ n_2-1}(n_1 - k_1 - k_2 + 1)}{k_1 + k_2}.$$

Par supposition, on a

$$N_{k_1\ k_2-1}^{n_1\ n_2-1} = \binom{n_2 - k_2}{k_1}\binom{n_1 - k_1}{k_2 - 1};$$

donc :

$$N_{k_1\ k_2}^{n_1\ n_2} = \frac{N_{k_1-1\ k_2}^{n_1-1\ n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 1) + k_2\binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{k_1}}{k_1 + k_2}.$$

De même,

$$N_{k_1-1\ k_2}^{n_1-1\ n_2} = \frac{N_{k_1-2\ k_2}^{n_1-2\ n_2}(n_2 - k_1 - k_2 + 2) + k_2\binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{k_1 - 1}}{k_1 + k_2 - 1},$$

. . . .

$$N_{1\ \ \ \ \ \ \ \ k_2}^{n_1-k_1+1\ n_2} = \binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{1}.$$

En sommant cette suite, nous obtenons :

$$N_{k_1\ k_2}^{n_1\ n_2} = \binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{k_1}.$$

Donc, la formule supposée exacte pour toute valeur de k_2 inférieure numériquement à k_2 a lieu pour la limite supérieure; elle est vérifiée pour $k_2 = 1$ et $k_2 = 2$: elle est donc générale. Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

Le nombre des groupes de $k_1 + k_2$ *éléments communs à deux involutions* $I_{k_1}^{n_1}$ *et* $I_{k_2}^{n_2}$ *superposées est* $\binom{n_1 - k_1}{k_2}\binom{n_2 - k_2}{k_1}$ (*).

(*) *Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieures, marquées sur un même support,* par M. *Le Paige* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. XI).

3. Prenons un élément quelconque du support où se trouvent placées deux involutions, $I_{k_1}^{n_1}$ et $I_{k_2}^{n_2}$; il lui correspond, dans ces dernières, des groupes de $n_1 - 1$ et $n_2 - 1$ éléments formant deux involutions $I_{k_1 - 1}^{n_1 - 1}$ et $I_{k_2 - 1}^{n_2 - 1}$. Ces deux involutions ont en commun des groupes de $k_1 + k_2 - 2$ éléments, en nombre $\binom{n_1 - k_1}{k_2 - 1}\binom{n_2 - k_2}{k_1 - 1}$. Nous obtenons donc cette propriété :

Un élément quelconque du support commun à deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$ *et* $I_{k_2}^{n_2}$ *entre dans* $\binom{n_1 - k_1}{k_2 - 1}\binom{n_2 - k_2}{k_1 - 1}$ *groupes de* $k_1 + k_2 - 1$ *éléments communs à ces involutions.*

On démontrerait de même le théorème plus général suivant :

k éléments arbitraires du support commun à deux involutions $I_{k_1}^{n_1}$ *et* $I_{k_2}^{n_2}$, *entrent dans* $\binom{n_1 - k_1}{k_2 - k}\binom{n_2 - k_2}{k_1 - k}$ *groupes de* $k_1 + k_2 - k$ *éléments communs à ces deux involutions.*

4. Supposons que nous ayons déterminé le nombre des groupes communs à q involutions, quand la somme de leurs rangs est un multiple de $q - 1$; nous représenterons en général par ${}^{(q)}N_{k_i}^{n_i}$ le nombre des groupes communs à q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$, et par ${}^{(q)}N_{k_i - p}^{n_i - p}$ le nombre des groupes communs à q involutions $I_{k_i - p}^{n_i - p}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$. Nous nous proposons, connaissant ces nombres, de rechercher le nombre des groupes communs à $q + 1$ involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, q + 1)$ quand le problème est possible.

5. 1° Soient q involutions $I_{k_i}^{n_i}$, satisfaisant à la condition que le nombre $\Sigma^q k_i - 1$ (*) est un multiple μ de $q - 1$; ces involutions possèdent des groupes de μ éléments communs, en nombre simplement infini. Recherchons combien il existe de ces groupes qui contiennent $l + 1$ éléments appartenant à des groupes de m éléments d'une involution donnée, I_l^m ; représentons ce nombre par ${}^{(1)}X_l^m$.

A un élément A du support commun aux involutions, il correspond dans les involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$, des

(*) Afin d'éviter toute équivoque, nous dirons désormais qu'un nombre est un multiple a de b, quand ce nombre est égal au produit ab.

groupes de $n_i - 1$ éléments formant q involutions, $I_{k_i-1}^{n_i-1}$. La somme des rangs de ces involutions est

$$\sum^q k_i - q = \sum^q k_i - 1 - (q-1) = (\mu - 1)(q-1);$$

par conséquent, ces q involutions $I_{k_i-1}^{n_i-1}$ ont des groupes de $\mu-1$ éléments communs en nombre fini, ${}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1}$; nous pouvons combiner les éléments de chacun de ces groupes communs de $\binom{\mu-1}{l}$ manières, de façon à former des groupes de l éléments; et à chacun de ces groupes de l éléments, il correspond dans I_l^m, $(m-l)$ éléments B. Si l'un de ces éléments B coïncidait avec l'élément A, nous aurions un des groupes cherchés; à un élément A, il correspond donc

$$\alpha = \binom{\mu-1}{l}(m-l)\,{}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1}$$

éléments B.

A un élément B, il correspond dans I_l^m des groupes de $m-1$ éléments formant une I_{l-1}^{m-1}; cette involution possède des groupes de $(m-1)$ éléments, dont l figurent dans des groupes de μ éléments communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$ en nombre fini ${}^{(1)}X_{l-1}^{m-1}$. A chacun de ces groupes, il correspond $\mu - l$ éléments A, qui complètent les groupes de μ éléments communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$. Par suite, à un élément B, il correspond

$$\beta = (\mu - l)\,{}^{(1)}X_{l-1}^{m-1}$$

éléments A.

Entre les éléments A et B, il existe donc une correspondance (α, β); chacun des groupes cherchés absorbe $l+1$ des coïncidences de cette correspondance; nous aurons ainsi :

$${}^{(1)}X_l^m = \frac{\alpha+\beta}{l+1} = \frac{\binom{\mu-1}{l}(m-l)\,{}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1} + (\mu-l)\,{}^{(1)}X_{l-1}^{m-1}}{l+1}.$$

Remplaçons successivement dans cette formule l et m par

$l - 1$, $l - 2$, ..., 1 et $m - 1$, $m - 2$, ..., $m - l + 1$; nous aurons la suite récurrente

$$ {}^{(1)}X_{l-1}^{m-1} = \frac{(m - l)\binom{\mu - 1}{l - 1}{}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1} + (\mu - l + 1)\,{}^{(1)}X_{l-2}^{m-2}}{l}, $$

. . . .

$$ {}^{(1)}X_{1}^{m-l+1} = \frac{(m - l)\binom{\mu - 1}{1}{}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1} + (\mu - 1)\,{}^{(1)}X_{0}^{m-l}}{2}. $$

${}^{(1)}X_0^{m-l}$ est le nombre des groupes de μ éléments communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ qui contiennent un élément pris parmi $m - l$ éléments donnés ; par conséquent, on a :

$$ {}^{(1)}X_0^{m-l} = (m - l)\,{}^{(1)}N_{k_i-1}^{n_i-1}. $$

En sommant la suite récurrente, nous obtenons :

$$ {}^{(1)}X_l^m = {}^{(q)}N_{k_i-1}^{n_i-1}\binom{\mu - 1}{l}(m - l). $$

6. 2° Soient q involutions $I_{k_i}^{n_i}$, $(i = 1, 2, ..., q)$, possédant des groupes communs de $\frac{\Sigma^q k_i - 2}{q - 1} = \mu$ éléments : le nombre de ces groupes est donc doublement infini. Recherchons le nombre de ces groupes qui contiennent $l + 2$ éléments appartenant à des groupes de m éléments d'une involution donnée I_l^m ; soit ${}^{(2)}X_l^m$ ce nombre.

A un élément A du support commun aux involutions, il correspond dans les q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ des groupes d'éléments formant q involutions $I_{k_i-1}^{n_i-1}$; ces involutions satisfont à la condition que la somme de leurs rangs, diminuée de l'unité, est un multiple, $\mu - 1$, de $q - 1$; ces involutions ont, en conséquence, des groupes de $\mu - 1$ éléments communs en nombre infini.

Parmi ces groupes, il en existe, d'après ce que nous venons de voir, un nombre

$$ (m - l)\binom{\mu - 2}{l}{}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2} $$

qui contiennent $l+1$ éléments appartenant à des groupes de l'involution I_l^m, et à chacun de ces groupes de $l+1$ éléments il correspond dans I_l^m, $(m-l-1)$ éléments B. Si un de ces éléments B coïncidait avec A, nous aurions un des groupes cherchés.

A un élément A, il correspond donc

$$\alpha = 2\binom{\mu-2}{l}\binom{m-l}{2}{}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2}$$

éléments B.

A un élément B, il correspond dans I_l^m des groupes de $m-1$ éléments formant une I_{l-1}^{m-1} qui possède des groupes de $l+1$ éléments, en nombre fini, faisant partie de groupes de μ éléments communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$. Soit ${}^{(2)}X_{l-1}^{m-1}$ ce nombre ; à chacun de ces groupes de $l+1$ éléments, il correspond $\mu-l-1$ éléments A ; à un élément B, il correspond ainsi

$$\beta = (\mu-l-1){}^{(2)}X_{l-1}^{m-1}$$

éléments A. Entre les éléments A et B, il existe une correspondance $(\alpha . \beta)$; chacun des groupes dont nous recherchons le nombre, absorbe $l+2$ coïncidences de cette correspondance; nous aurons donc :

$${}^{(2)}X_l^m = \frac{\alpha+\beta}{l+2} = \frac{2\binom{\mu-2}{l}\binom{m-l}{2}{}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2} + (\mu-l-1){}^{(2)}X_{l-1}^{m-1}}{l+2};$$

remplaçons dans cette formule successivement l et m par $l-1, \ldots 1$ et $m-1, m-2, \ldots m-l+1$; nous aurons la suite de relations :

$${}^{(2)}X_{l-1}^{m-1} = \frac{2\binom{\mu-2}{l-1}\binom{m-l}{2}{}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2} + (\mu-l){}^{(2)}X_{l-2}^{m-2}}{l+1},$$

. . . .

$${}^{(2)}X_1^{m-l+1} = \frac{2\binom{\mu-2}{1}\binom{m-l}{2}{}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2} + (\mu-2){}^{(2)}X_0^{m-l}}{3}.$$

Or, ${}^{(2)}X_0^{m-l}$ est le nombre des groupes de μ éléments qui sont communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ et qui contiennent 2 éléments pris dans $m-l$ éléments fixes; nous aurons donc

$$ {}^{(2)}X_0^{m-l} = \binom{m-l}{2} {}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2}. $$

En sommant la suite récurrente, nous obtenons :

$$ {}^{(2)}X_l^m = \binom{\mu-2}{l}\binom{m-l}{2} {}^{(q)}N_{k_i-2}^{n_i-2}. $$

7. 3° Soient q involutions $I_{k_i}^{n_i}$, $(i=1, 2, 3, \ldots, q)$ satisfaisant à la condition

$$ \frac{\sum^q k_i - p}{q-1} = \text{Entier} = \mu; $$

ces involutions possèdent des groupes communs de μ éléments en nombre p fois infini. Le nombre fini de ces groupes qui contiennent $l+p$ éléments appartenant à des groupes de m éléments d'une involution I_l^m, est donné par la formule

$$ {}^{(p)}X_l^m = \binom{\mu-p}{l}\binom{m-l}{p} {}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p}. $$

En effet, si nous supposons cette formule exacte pour toutes valeurs des quantités k_i, n_i, m et l, mais pour des valeurs de p égales au plus, numériquement, à $p-1$, elle aura encore lieu pour la valeur numérique p. D'après cette hypothèse, des raisonnements analogues aux précédents conduisent à la formule :

$$ {}^{(p)}X_l^m = \frac{p\binom{\mu-p}{l}\binom{m-l}{p} {}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p} + {}^{(p)}X_{l-1}^{m-1}(\mu-p-l+1)}{l+p}. $$

Si nous remplaçons successivement dans cette formule, l et m

par $l-1$, $l-2$, ..., 1 et $m-1$, $m-2$, ..., $m-l+1$, nous aurons la suite d'équations

$$^{(p)}X_{l-1}^{m-1} = \frac{p\binom{\mu-p}{l-1}\binom{m-l}{p}\,{}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p} + (\mu-p-l+2)\,{}^{(p)}X_{l-2}^{m-2}}{l+p-1},$$

. . . .

$$^{(p)}X_1^{m-l+1} = \frac{p\binom{\mu-p}{1}\binom{m-l}{p}\,{}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p} + (\mu-p)\,{}^{(p)}X_0^{m-l}}{p+1}.$$

Ainsi que précédemment, on trouve

$$^{(p)}X_0^{m-l} = \binom{m-l}{p}\,{}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p}.$$

En sommant la suite récurrente, nous obtenons d'après la dernière relation :

$$^{(p)}X_l^m = \binom{\mu-p}{l}\binom{m-l}{p}\,{}^{(q)}N_{k_i-p}^{n_i-p}.$$

Cette formule, que nous avons supposée exacte pour toute valeur de p égale numériquement au plus à $p-1$, a encore lieu pour la valeur p; elle est vérifiée pour $p=1$ et $p=2$; elle est donc générale.

8. 4° Supposons que la valeur de l soit telle que l'on ait $l+p=\mu$; dans ce cas, le nombre $^{(p)}X_l^m$ devient le nombre des groupes communs aux q involutions $I_{k_i}^{n_i}$ et à I_l^m. Ces $q+1$ involutions possèdent, du reste, des groupes de μ éléments communs en nombre fini, puisque la somme de leurs rangs :

$$\sum^q k_i + l = \sum^q k_i + \mu - p = \frac{q\sum^q k_i - pq}{q-1},$$

est un multiple μ du nombre q. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Le nombre des groupes de μ *éléments communs à* q *involutions* $\mathrm{I}_{\mathrm{k_i}}^{\mathrm{n_i}}$ *et à une involution* $\mathrm{I}_{\mu-\mathrm{p}}^{\mathrm{m}}$, *quand on a la condition*

$$\mu = \frac{\sum^{q} k_i - p}{q-1},$$

est égal à

$$\binom{m-\mu+p}{p} {}^{(q)}\mathrm{N}_{k_i-p}^{n_i-p}.$$

9. D'autre part, comme nous l'avons vu (II, v, 1), la condition pour que $q+1$ involutions $\mathrm{I}_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q, q+1)$ aient des groupes d'éléments communs en nombre fini, est

$$\frac{\sum^{q+1} k_i}{q} = \mathrm{E}$$

(E étant un nombre entier); le type de ces involutions sera

$$\mathrm{I}_{k_1}^{n_1}, \quad \mathrm{I}_{k_2}^{n_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{k_q}^{n_q}, \quad \mathrm{I}^{n_{q+1}}_{\frac{k_1+k_2+\cdots+k_q-pq}{q-1}},$$

p étant un nombre entier.

En effet, si nous désignons par k_{q+1} le plus petit des nombres k $(i = 1, 2, \ldots, q, q+1)$, nous pourrons toujours écrire

$$(q-1)\,k_{q+1} = k_1 + k_2 + \cdots + k_q - \mathrm{Q},$$

Q étant un nombre entier positif ou nul. Or, on doit avoir

$$\sum^{q+1} k_i = q\mathrm{E};$$

donc,

$$q\,(k_1 + k_2 + \cdots + k_q) - \mathrm{Q} = q\,(q-1)\,\mathrm{E};$$

par conséquent, Q doit être divisible par q, et nous pourrons écrire $\mathrm{Q} = pq$. Le type de $q+1$ involutions qui ont des groupes d'éléments communs en nombre fini est donc bien celui que nous avons indiqué. D'un autre côté, si l'on se donne $q+1$ involutions $\mathrm{I}_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, \ldots, q+1)$, satisfaisant à la condition

$$\sum^{q+1} k_i = q\mu,$$

le nombre de leurs groupes de μ éléments communs sera donné par la formule

$$^{(q+1)}\mathrm{N}_{k_i}^{n_i} = {}^{(q)}\mathrm{N}_{k_i - \mu + k_{q+1}}^{n_i - \mu + k_{q+1}} \binom{n_{q+1} - k_{q+1}}{\mu - k_{q+1}}.$$

Il suffit, en effet, de remplacer m par n_{q+1}, l par k_{q+1}, et $l+p$ par μ dans la formule qui donne la valeur de $^{(p)}\mathrm{X}_l^m$; nous obtenons ainsi le nombre des groupes communs à $q+1$ involutions, en fonction du nombre des groupes communs à q involutions. Nous aurons par le même procédé la suite d'équations :

$$^{(q)}\mathrm{N}_{k_i - \mu + k_{q+1}}^{n_i - \mu + k_{q+1}} = {}^{(q-1)}\mathrm{N}_{k_i - 2\mu + k_q + k_{q+1}}^{n_i - 2\mu + k_q + k_{q+1}} \binom{n_q - k_q}{\mu - k_q},$$

$$^{(q-1)}\mathrm{N}_{k_i - 2\mu + k_q + k_{q+1}}^{n_i - 2\mu + k_q + k_{q+1}} = {}^{(q-2)}\mathrm{N}_{k_i - 3\mu + k_{q-1} + k_q + k_{q+1}}^{n_i - 3\mu + k_{q-1} + k_q + k_{q+1}} \binom{n_{q-1} - k_{q-1}}{\mu - k_{q-1}}.$$

. . . .

On arrive finalement, en se servant d'un résultat obtenu plus haut, à la relation

$$^{(2)}\mathrm{N}_{k_i - (q-1)\mu + k_3 + \cdots + k_{q+1}}^{n_i - (q-1)\mu + k_3 + \cdots + k_{q+1}} = \binom{n_1 - k_1}{\mu - k_1} \binom{n_2 - k_2}{\mu - k_2}.$$

Les formules précédentes, combinées par multiplication, donnent

$$^{(q+1)}\mathrm{N}_{k_i}^{n_i} = \prod^{q+1} \binom{n_i - k_i}{\mu - k_i}, \quad \mu = \frac{\sum^{q+1} k_i}{q}.$$

Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème général suivant :

q + 1 *involutions d'ordres* n_i *et de rangs* k_i, *dont la somme* *des rangs est un multiple* μ *de* q, *ont des groupes de* μ *éléments communs en nombre fini*

$$\prod^{q+1} \binom{n_i - k_i}{\mu - k_i}.$$

10. En particulier, q + 1 *involutions du même rang* mq *et d'ordres quelconques* n_i *possèdent des groupes de* m (q + 1) *éléments communs en nombre fini*

$$\prod^{q+1} \binom{n_i - mq}{m}.$$

Plus particulièrement encore, *le nombre des groupes de* q + 1 *éléments communs à* q + 1 *involutions de même rang* q *et d'ordres quelconques* n_i *est égal à*

$$\prod_1^{q+1} (n_i - q).$$

Ce dernier théorème a été donné par *M. Le Paige* (*).

11. Soient $q + 1$ involutions $I_{k_i}^{n_i}$, dont la somme des rangs, diminuée d'un nombre entier r, est un multiple m de q; ces $q + 1$ involutions possèdent des groupes de m éléments communs en nombre r fois infini. Si l'on donne r points arbitraires du support commun à ces $q + 1$ involutions, il leur correspond, dans les $q + 1$ involutions $I_{k_i}^{n_i}$, des groupes d'éléments formant $q + 1$ involutions $I_{k_k - r}^{n_i - r}$, $(i = 1, 2, 3, ..., q + 1)$.

La somme des rangs de ces dernières involutions est un multiple $m - r$ de q; ces involutions ont donc en commun un nombre

$$\prod_1^{q+1} \binom{n_i - k_i}{\frac{\sum k_i - r}{q} - k_i}$$

de groupes de $m - r$ éléments, et nous aurons cette propriété :

(*) Voir le Mémoire de M. *Le Paige* (rappelé page 75).

Si la somme des rangs de q + 1 *involutions* $I^{n_i}_{k_i}$ *est un multiple* m *de* q *augmenté de* r, r *éléments quelconques du support de ces involutions entrent dans* $\prod\limits_1^{q+1}\binom{n_i - k_i}{m - k_i}$ *groupes de* m *éléments communs à ces involutions.*

Plus généralement, *à* j *points du support de* q + 1 *involutions* $I^{n_i}_{k_i}$ $(j = r \pm nq)$ *il correspond dans ces involutions des groupes de* $n_i - j$ *éléments formant* q + 1 *involutions* $I^{n_i - j}_{k_i - j}$; *la somme des rangs de ces involutions est un multiple* $m - \big(r \pm (q + 1)\, n\big)$ *de* q; conséquemment, ces $q + 1$ involutions $I^{n_i - j}_{k_i - j}$ ont en commun des groupes de $m - \big(r \pm n\,(q + 1)\big)$ éléments en nombre fini

$$\prod^{q+1}\binom{n_i - k_i}{m - \big(r \pm n\,(q + 1)\big) - k_i},$$

et nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Si q + 1 *involutions ont des groupes de* m *éléments communs en nombre* r *fois infini*

$$m = \frac{\sum\limits^{q+1} k_i - r}{q},$$

$r \pm nq$ *éléments arbitraires du support de ces involutions entrent dans*

$$\prod^{q+1}\binom{n_i - k_i}{m - \big(r \pm n\,(q + 1)\big) - k_i}$$

groupes de $m \mp n$ *éléments communs aux* q + 1 *involutions.*

En supposant $r = 0$, nous arrivons à ce théorème final : *Si la somme des rangs de* q + 1 *involutions* $I^{n_i}_{k_i}$ *est un multiple* m *de* q, nq *éléments arbitraires du support entrent dans*

$$\prod^{q+1}\binom{n_i - k_i}{m - n\,(q + 1) - k_i}$$

groupes de m — n *éléments communs aux involutions proposées.*

Ces derniers théorèmes sont l'expression la plus générale des propriétés des groupes d'éléments communs à un système d'involutions quelconques.

12. Pour la suite de notre travail, il est nécessaire d'établir la solution de quelques problèmes sur les groupes communs à certaines involutions.

1° Deux involutions d'ordre m et du premier rang ont, ainsi que nous venons de le voir, des couples communs en nombre $(m-1)^2$; si les deux involutions appartiennent à un même faisceau, c'est-à-dire si elles ont en commun un groupe de m éléments, il est visible que le nombre des couples communs se réduira à

$$(m-1)^2 - \frac{m.(m-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

2° Plus généralement, soient $k+1$ involutions d'ordre m et de rang k, ${}^{(i)}\mathrm{I}_k^m$ $i = (1, 2, 3, \ldots, k+1)$, appartenant à un même faisceau, c'est-à-dire ayant en commun les groupes d'une involution d'ordre m et de rang $k-1$; recherchons combien ces involutions ont de groupes de $k+1$ éléments communs, qui ne font pas partie des groupes de l'involution commune I_{k-1}^m.

Représentons ce nombre par la notation ${}^{(k+1)}\mathrm{N}_k^m\left(\begin{smallmatrix} m \\ k-1 \end{smallmatrix}\right)$; désignons par A_i, un élément quelconque du support des involutions (i étant égal à 1, ou 2, ou ..., ou $k+1$, selon qu'on le considère dans l'une ou l'autre des $k+1$ involutions données).

Prenons k éléments du support, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{i-1}, \mathrm{A}_{i+1}, \ldots \mathrm{A}_{k+1}$, appartenant respectivement à k des involutions données,

$${}^{(1)}\mathrm{I}_k^m,\quad {}^{(2)}\mathrm{I}_k^m,\quad \ldots,\quad {}^{(i-1)}\mathrm{I}_k^m,\quad {}^{(i+1)}\mathrm{I}_k^m,\quad \ldots,\quad {}^{(k+1)}\mathrm{I}_k^m$$

et supposons que ces $k+1$ éléments coïncident en un seul élément A ; il leur correspond, dans ces involutions, des groupes de $m-1$ éléments, formant k involutions d'ordre $m-1$ et de rang $k-1$, appartenant à un même faisceau, c'est-à-dire ayant en commun les groupes d'une involution d'ordre $m-1$ et de rang $k-1$: ces involutions auront des groupes de k éléments communs, ne faisant pas partie de l'involution commune, en nombre ${}^{(k)}\mathrm{N}_{k-1}^{m-1}\left(\begin{smallmatrix} m-1 \\ k-2 \end{smallmatrix}\right)$; à chacun de ces groupes, il correspond dans l'involution restante ${}^{(i)}\mathrm{I}_k^m$, $m-k$ éléments A_i ; si l'un de ces éléments A_i coïncide avec les k éléments coïncidents, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_{k+1}, nous aurons un des groupes cherchés.

Ce que nous venons de voir suffit pour démontrer qu'entre les éléments A_1, A_2, ..., A_{k+1}, il existe la correspondance

$$\left({}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}\times(m-k),\ {}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}\times(m-k),\ \ldots,\right.$$
$$\left.{}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}\times(m-k)\right);$$

d'après l'extension du principe de Chasles, il existe

$$(k+1)(m-k)\,{}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}$$

coïncidences. Parmi ces coïncidences, il en existe qui correspondent à des groupes de $k+1$ éléments communs aux $k+1$ involutions ${}^{(i)}I^m_k$ et qui font partie de I^m_{k-1}.

En effet, si l'élément A est un élément k fois multiple de I^m_{k-1}, il lui correspond, dans cette dernière involution, $m-k$ éléments qui peuvent se grouper k à k de $\binom{m-k}{k}$ manières, de façon à former avec l'élément k^{uple} un groupe compris dans le nombre des coïncidences. Puisque l'involution I^m_{k-1} possède $k(m-k+1)$ éléments k fois multiples, il faudra retrancher du nombre primitivement obtenu, $k(m-k+1)\binom{m-k}{k}$; nous obtenons ainsi pour le nombre des coïncidences *utiles* de la correspondance :

$$(k+1)(m-k)\,{}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}+k(m-k+1)\binom{m-k}{k}.$$

Chacun des groupes dont nous recherchons le nombre absorbe $k+1$ de ces coïncidences; donc

$$^{k+1}N^m_k\binom{m}{k-1}=\frac{(k+1)(m-k)\,{}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}-k(m-k+1)\binom{m-k}{k}}{k+1}$$
$$=(m-k)\,{}^{(k)}N^{m-1}_{k-1}\binom{m-1}{k-2}-k\binom{m-k+1}{k+1}.$$

Nous aurons de même :

$$^{(k)}\mathrm{N}_{k-1}^{m-1}\binom{m-1}{k-2} = (m-k)\,^{(k-1)}\mathrm{N}_{k-2}^{m-2}\binom{m-2}{k-3} - (k-1)\binom{m-k+1}{k},$$

. . . .

$$^{(3)}\mathrm{N}_{2}^{m-k+2}\binom{m-k+2}{1} = (m-k)\,^{(2)}\mathrm{N}_{1}^{m-k+1}\binom{m-k+1}{0} - 2\binom{m-k+1}{3},$$

$$^{(2)}\mathrm{N}_{1}^{m-k+1}\binom{m-k+1}{0} = \binom{m-k+1}{2};$$

et finalement :

$$^{(k+1)}\mathrm{N}_{k}^{m}\binom{m}{k-1} = \binom{m-k}{k+1}.$$

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème :

k + 1 *involutions, d'ordre* m *et de rang* k, *qui ont en commun les groupes d'une involution d'ordre* m *et de rang* k — 1, *ont en outre des groupes de* k + 1 *éléments communs en nombre* $\binom{m-k}{k+1}$.

Ce théorème nous sera d'une grande utilité dans la suite.

VI

Éléments neutres.

1. Soit E_{n-k-1} l'espace principal d'une involution d'ordre n et de rang k, I_k^n, dont les groupes sont représentés par des systèmes de n points d'une courbe normale C_n, de l'espace à n dimensions E_n.

Supposons qu'à k points de C_n, il corresponde dans I_k^n deux groupes de $n-k$ points : dans ce cas, ces k points, joints à E_{n-k-1}, ne déterminent plus un espace à $n-1$ dimensions, mais un espace à $n-i$ dimensions, i étant au minimum égal à deux. Tout espace E_{n-1} à $n-1$ dimensions qui passera par cet espace à $n-i$ dimensions, marquera sur la courbe C_n des groupes de $n-k$ points qui, avec les k points donnés, forment des groupes de I_k^n.

D'après la représentation des involutions dans les espaces dont le nombre des dimensions est supérieur à leur ordre, ces groupes de $n - k$ points forment une involution d'ordre $n - k$ et de rang $i - 1$.

Selon que i sera égal à 2, ou à 3, ou ... à φ, nous dirons que les groupes de k points qui jouissent de cette propriété forment les images des groupes de k éléments neutres de première, deuxième, ..., ou $(\varphi - 1)^{\text{ième}}$ espèce, de l'involution I_k^n.

Nous pourrons ainsi énoncer les théorèmes suivants :

Quand à k *éléments il correspond dans une involution* I_k^n *deux groupes de* n — k *éléments, il leur en correspond une infinité d'autres qui forment une involution d'ordre* n — k *et du premier rang : ces groupes sont les groupes de* k *éléments neutres de première espèce de l'involution.*

Quand à k *éléments il correspond dans une involution* I_k^n $\varphi + 1$ *groupes de* n — k *éléments indépendants entre eux, il leur en correspond une* φ^{uple} *infinité d'autres, formant une involution d'ordre* n — k *et de rang* φ (*).

2. *Groupes de* k *éléments neutres de première espèce.*

Soit l'équation d'une involution I_k^n sous la forme

$$\lambda_1 a1_x^n + \lambda_2 a2_x^n + \cdots + \lambda_{k+1}\overline{ak+1}_x^n = 0;$$

nous supposons comme précédemment que la forme ai_x^n a pour expression

$$ai_x^n = ai_0 x_1^n + ai_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + ai_n x_2^n.$$

L'espace principal E_{n-k-1} de cette involution est formé par l'intersection des $k+1$ espaces à $n-1$ dimensions dont les équations sont

$$a1_x = 0, \quad a2_x = 0, \quad \ldots, \quad \overline{ak+1}_x = 0,$$

$$(ai_x = ai_0 x_1 + ai_1 x_2 + \cdots + ai_n x_{n+1}).$$

(*) Le premier de ces théorèmes a été donné par M. *Weyr* (*loc. cit.*, p. 58).

D'après ce que nous venons de voir, la recherche des groupes de k éléments neutres de première espèce revient à la détermination du nombre des espaces à $n-2$ dimensions qui passent par E_{n-k-1} et qui rencontrent la courbe C_n en k points. Or, tout espace à $n-2$ dimensions passant par E_{n-k-1}, a pour équations

$$\lambda_1^{(1)} a1_x + \lambda_2^{(1)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-1}^{(1)} \overline{ak-1}_x + \lambda_k^{(1)} ak_x = 0,$$

$$\lambda_1^{(2)} a1_x + \lambda_2^{(2)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-1}^{(2)} \overline{ak-1}_x + \lambda_k^{(2)} \overline{ak+1}_x = 0.$$

Chacune de ces équations représente un faisceau, d'ordre $k-1$, d'espaces à $n-1$ dimensions; les espaces de ces faisceaux rencontrent la courbe C_n en des groupes de n points, formant deux involutions I_{k-1}^n; ces deux involutions ont pour équations

$$\lambda_1^{(1)} a1_x^n + \lambda_2^{(1)} a2_x^n + \cdots + \lambda_{k-1}^{(1)} \overline{ak-1}_x^n + \lambda_k^{(1)} ak_x^n = 0,$$

$$\lambda_1^{(2)} a1_x^n + \lambda_2^{(2)} a2_x^n + \cdots + \lambda_{k-1}^{(2)} \overline{ak-1}_x^n + \lambda_{k+1}^{(2)} \overline{ak+1}_x^n = 0.$$

Ces deux involutions ont en commun les groupes de n éléments de l'involution d'ordre n et de rang $k-1$, dont l'équation est

$$\rho_1 a1_x^n + \rho_2 a2_x^n + \cdots + \rho_{k-1} \overline{ak-1}_x^n = 0.$$

Le problème revient donc à rechercher le nombre des groupes de k éléments communs à deux involutions d'ordre n et de rang $k-1$, I_{k-1}^n, qui contiennent les groupes d'une involution d'ordre n et de rang $k-2$.

Prenons $k-2$ éléments arbitraires; il leur correspond dans les deux involutions I_{k-1}^n des groupes de $n-k+2$ éléments, formant deux involutions I_1^{n-k+2}, d'ordre $n-k+2$ et du premier rang, qui ont en commun un groupe de $n-k+2$ éléments; d'après ce que nous avons vu (II, v, 12), ces deux involutions ont des couples communs, ne faisant pas partie du groupe de $n-k-2$ éléments communs, en nombre $\binom{n-k+1}{2}$.

Nous pourrons, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

k — 2 *éléments arbitraires du support d'une involution* I_k^n

peuvent s'associer à $\binom{n-k+1}{2}$ *couples, de façon à former* $\binom{n-k+1}{2}$ *groupes de* k *éléments neutres de première espèce de cette involution* I_k^n.

En particulier, si nous supposons $k = n - 1$, et $k = 2$, nous obtenons ces propriétés :

Les groupes de $n - 1$ *éléments neutres de première espèce d'une involution* I_{n-1}^n *forment une involution d'ordre* $n - 1$ *et de rang* $n - 3$.

Une involution d'ordre n *et du second rang possède* $\binom{n-1}{2}$ *couples neutres* (*).

3. En général, à $k - 1$ éléments du support d'une involution I_k^n il correspond dans cette involution des groupes de $n - k + 1$ éléments formant une I_1^{n-k+1} ; par un choix convenable des $k - 1$ éléments, il peut arriver que cette involution I_1^{n-k+1} soit indéterminée, c'est-à-dire qu'un de ses groupes ne soit plus déterminé par un de ses éléments, mais par i de ses éléments; ces groupes formeront, dans ce cas, une involution d'ordre $n - k + 1$ et de rang i.

Nous dirons que les groupes de $k - 1$ éléments, qui jouissent de cette propriété, sont les groupes de $k - 1$ éléments neutres de première, deuxième, ..., ou $(\varphi - 1)^{\text{ième}}$ espèce, selon que i sera égal à 2, 3, ..., ou φ.

Eu égard aux considérations que nous avons émises, quant à la représentation d'une involution marquée sur une courbe normale d'un espace dont le nombre de dimensions est supérieur à l'ordre de l'involution, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

Si à un groupe de $k - 1$ *éléments du support d'une involution* I_k^n *il correspond dans cette involution trois groupes de* $n - k + 1$ *éléments complètement indépendants, il lui en correspond une double infinité d'autres, formant une involution d'ordre* $n - k + 1$ *et de second rang.*

Si à un groupe de $k - 1$ *éléments du support d'une involu-*

(*) Ces théorèmes sont dus à M. *Em. Weyr* (*loc. cit.*, pp. 58 et 89).

tion I_k^n *il correspond dans cette involution* $\varphi + 1$ *groupes indépendants entre eux, il lui en correspond une* φ^{uple} *infinité d'autres qui forment une involution d'ordre* $\mathrm{n} - \mathrm{k} + 1$ *et de rang* φ.

4. *Groupes de* $\mathrm{k} - 1$ *éléments neutres de première espèce.*

D'après la représentation d'une involution I_k^n sur une courbe normale C_n de l'espace à n dimensions E_n, un groupe neutre de $k - 1$ éléments neutres de première espèce, joint à l'espace principal E_{n-k-1} de I_k^n, détermine non un espace à $n - 2$ dimensions, mais un espace à $n - 3$ dimensions. Rechercher le nombre des groupes de $k - 1$ éléments neutres de première espèce d'une I_k^n, revient à rechercher le nombre des espaces à $n - 3$ dimensions que l'on peut mener par E_{n-k-1}, de façon à rencontrer la courbe C_n en $k - 1$ points.

Si nous reprenons la représentation analytique d'une I_k^n que nous avons employée plus haut (II, VI, 2), tout espace à $n - 3$ dimensions, passant par I_{n-k-1}, a pour équations

$$\lambda_1^{(1)} a1_x + \lambda_2^{(1)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-2}^{(1)} \overline{ak - 2}_x + \lambda_{k-1}^{(1)} \overline{ak - 1}_x = 0,$$

$$\lambda_1^{(2)} a1_x + \lambda_2^{(2)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-2}^{(2)} \overline{ak - 2}_x + \lambda_{k-1}^{(2)} \overline{ak}_x = 0,$$

$$\lambda_1^{(3)} a1_x + \lambda_2^{(3)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-2}^{(3)} \overline{ak - 2}_x + \lambda_{k+1}^{(3)} \overline{ak + 1}_x = 0.$$

Chacune de ces équations représente un faisceau, d'ordre $k-2$, d'espaces à $n - 1$ dimensions; les points de rencontre de la courbe C_n avec les espaces de ces faisceaux forment les groupes de trois involutions d'ordre n et de rang $k - 2$: ces trois involutions ont en commun les groupes d'une involution d'ordre n et de rang $k - 3$, marqués sur la courbe C_n par les points d'intersection des espaces à $n - 1$ dimensions du faisceau d'ordre $k - 3$, qui a pour équation

$$\rho_0 a1_x + \rho_1 a2_x + \cdots + \rho_{k-3} \overline{ak - 2}_x = 0.$$

Le problème revient donc à celui-ci : Combien trois involutions d'ordre n et de rang $k - 2$, qui ont en commun les groupes d'une involution d'ordre n et de rang $k - 3$, ont-elles de groupes de $k - 1$ éléments communs ?

Étant donnés $k-4$ éléments du support des trois involutions, il leur correspond dans ces dernières des groupes de $n - k + 4$ éléments, formant trois involutions d'ordre $n - k + 4$ et du second rang : ces trois involutions ont en commun les groupes d'une involution d'ordre $n - k + 4$ et de premier rang. Comme nous l'avons vu, ces trois involutions ont en commun $\binom{n-k+2}{3}$ ternes d'éléments. Nous pourrons énoncer, en conséquence, les théorèmes suivants :

$\mathrm{k} - 4$ *éléments arbitraires du support d'une involution* $\mathrm{I}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}$ *figurent dans* $\binom{\mathrm{n}-\mathrm{k}+2}{3}$ *groupes de* $\mathrm{k} - 1$ *éléments neutres de première espèce de cette involution.*

Les groupes de $\mathrm{n} - 2$ *éléments neutres de première espèce d'une involution* $\mathrm{I}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{n}}$ *forment une involution d'ordre* $\mathrm{n} - 2$ *et de rang* $\mathrm{n} - 5$ (*).

Toute involution d'ordre n *et de quatrième rang possède* $\binom{\mathrm{n}-2}{3}$ *ternes d'éléments neutres de première espèce.*

Les deux derniers théorèmes se déduisent du premier, en supposant successivement $k = n - 1$ et $k = 4$.

5. En général, à $k - p$ éléments du support d'une I_k^n il correspond dans cette involution des groupes de $n - k + p$ éléments, formant une I_p^{n-k+p} ; on peut déterminer les $k - p$ éléments de façon que cette involution I_p^{n-k+p} soit indéterminée, en ce sens que les groupes de cette involution ne soient plus déterminés par p de leurs éléments, mais par $p + i$: nous dirons que les groupes de $k - p$ éléments qui jouissent de cette propriété forment les groupes de $k - p$ éléments neutres de première, deuxième, ..., ou $\varphi^{\text{ième}}$ espèce, selon que i est égal à 1, 2, ..., ou φ.

De là, nous déduisons les théorèmes suivants :

Si à un groupe de $\mathrm{k} - \mathrm{p}$ *éléments du support d'une involu-*

(*) Ce théorème est dû à M. *Le Paige, Sur les éléments neutres des involutions* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. XIV).

tion I^n_k *il correspond dans cette involution* $p+2$ *groupes de* $n-k+p$ *éléments complètement indépendants entre eux, il lui correspond une* $(p+1)^{\text{uple}}$ *infinité d'autres groupes, formant une involution d'ordre* $n-k+p$ *et de rang* $p+1$.

Si à un groupe de $k-p$ *éléments du support d'une involution* I^n_k *il correspond dans cette involution* $p+\varphi+1$ *groupes de* $n-k+p$ *éléments complètement indépendants entre eux, il lui correspond une* $(\varphi+p)^{\text{uple}}$ *infinité d'autres groupes, formant une involution d'ordre* $n-k+p$ *et de rang* $p+\varphi$.

6. *Groupes de* $k-p$ *éléments neutres de première espèce.*

D'après ce que nous venons de voir, un groupe de $k-p$ éléments neutres de première espèce d'une involution I^n_k, représentée sur la courbe normale C_n de E_n, joint à l'espace principal E_{n-k+1} de cette involution, ne détermine pas un espace à $n-p-1$ dimensions, mais un espace à $n-p-2$ dimensions.

Par conséquent, pour rechercher les propriétés des groupes de $k-p$ éléments neutres de première espèce d'une involution I^n_k, il suffira de rechercher les propriétés des espaces à $n-p-2$ dimensions que l'on peut mener par E_{n-k-1} et qui rencontrent la courbe C_n en $k-p$ points.

Tout espace à $n-p-2$ dimensions, passant par E_{n-k-1}, a pour équations, si nous nous en rapportons à la notation précédemment employée :

$$\lambda_1^{(1)}a1_x+\lambda_2^{(1)}a2_x+\cdots+\lambda_{k-p-1}^{(1)}\overline{ak-p-1}_x+\lambda_{k-p}^{(1)}\overline{ak-p}_x=0,$$

$$\lambda_1^{(2)}a1_x+\lambda_2^{(2)}a2_x+\cdots+\lambda_{k-p-1}^{(2)}\overline{ak-p-1}_x+\lambda_{k-p}^{(2)}\overline{ak-p+1}_x=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1^{(p+2)}a1_x+\lambda_2^{(p+2)}a2_x+\cdots+\lambda_{k-p-1}^{(p+2)}\overline{ak-p-1}_x+\lambda_{k-p}^{(p+2)}\overline{ak+1}_x=0.$$

Chacune de ces équations représente un faisceau, d'ordre $k-p-1$, d'espaces à $n-1$ dimensions; les points de rencontre avec la courbe C_n des espaces de ces $p+2$ faisceaux forment $p+2$ involutions, d'ordre n et de rang $k-p-1$, I^n_{k-p-1}; ces $p+2$ involutions I^n_{k-p-1} ont en commun les groupes de l'involution d'ordre n et de rang $k-p-2$, marquée sur la courbe C_n par les espaces à $n-1$ dimensions du faisceau, d'ordre $k-p-2$, qui a pour équation

$$\rho_0 a1_x + \rho_1 a2_x + \cdots + \rho_{k-p-2}\overline{ak-p-1}_x = 0.$$

Le problème revient donc à rechercher le nombre des groupes de $k-p$ éléments communs à $p+2$ involutions I^n_{k-p-1} qui ont en commun les groupes d'une involution I^n_{k-p-2}.

Étant donné $k-2(p+1)$ éléments du support des $p+2$ involutions I^n_{k-p-1}, il leur correspond dans ces involutions des groupes de $n-k+2(p+1)$ éléments, formant $p+2$ involutions d'ordre $n-k+2(p+1)$ et de rang $p+1$; ces dernières involutions, ayant en commun les groupes d'une involution d'ordre $n-k+2(p+1)$ et de rang p, auront de plus $\binom{n-k+p+1}{p+2}$ groupes de $p+2$ éléments communs. Nous pourrons donc énoncer les théorèmes suivants :

$k-2(p+1)$ *éléments arbitraires du support d'une involution* I^n_k, *figurent dans* $\binom{n-k+p+1}{p+2}$ *groupes de* $k-p$ *éléments neutres de première espèce de cette involution.*

Les groupes de $n-p-1$ *éléments neutres de première espèce d'une involution d'ordre* n *et de rang* $n-1$, *forment une involution d'ordre* $n-p-1$ *et de rang* $n-2p-3$.

Toute involution d'ordre n *et de rang* $2(p+1)$ *possède des groupes de* $p+2$ *éléments neutres de première espèce, en nombre* $\binom{n-p-1}{p+2}$.

Ces théorèmes se déduisent du premier d'entre eux, en supposant $k=n-1$ et $k=2(p+1)$.

7. En particulier, prenons $p=\frac{n-3}{2}$, le nombre n étant impair; nous voyons qu'une involution d'ordre impair n et de rang $n-1$ possède un seul groupe neutre de $\frac{n+1}{2}$ éléments.

Or, les groupes de l'involution I^n_{n-1} sont marqués sur la courbe normale C_n de E_n par les intersections avec cette courbe des espaces à $n-1$ dimensions qui passent par un point fixe, point principal de l'involution; donc, en interprétant le théorème précédent, nous arrivons à cette propriété : *Par le point principal d'une involution* I^n_{n-1} *d'ordre impair, on ne peut mener qu'un seul espace à* $\frac{n-1}{2}$ *dimensions, rencontrant la courbe* C_n *en* $\frac{n+1}{2}$ *points.*

Cette interprétation nous conduit immédiatement à l'expression canonique des involutions, d'ordre $n = 2m + 1$ et de rang $2m$.

Soit A le point principal de cette involution, représentée sur la courbe normale C_n de l'espace à n dimensions, et soient

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n,$$

les coordonnées de ce point.

L'équation de l'involution représentée sera ainsi :

$$\sum_0^{2m} a_i P^{2m+1}_{2m+1-i} = 0, \quad (n = 2m + 1)$$

Désignons par

$$\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}, \quad \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda m + 1_1}{\lambda m + 1_2}$$

les paramètres des points de rencontre avec la courbe C_n de l'espace à n dimensions, $m + 1$ fois sécant de C_n, qui passe par A; nous pouvons visiblement écrire les relations suivantes :

$$\rho a_0 = \alpha_1 \left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{2m+1} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{2m+1} + \cdots + \alpha_{m+1} \left(\frac{\lambda m + 1_1}{\lambda m + 1_2}\right)^{2m+1},$$

$$\rho a_1 = \alpha_1 \left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{2m} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{2m} + \cdots + \alpha_{m+1} \left(\frac{\lambda m + 1_1}{\lambda m + 1_2}\right)^{2m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho a_{2m+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m+1}.$$

Le facteur ρ est un facteur de proportionnalité, et les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ sont des constantes déterminées.

Il s'ensuit que l'équation de l'involution pourra s'écrire :

$$\sum_{0}^{2m+1}\left\{\alpha_1\left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{2m+1-i}+\alpha_2\left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{2m+1-i}+\cdots\right.$$
$$\left.+\alpha_{m+1}\left(\frac{\lambda\overline{m+1}_1}{\lambda\overline{m+1}_2}\right)^{2m+1-i}\right\}P^{(2m+1)}_{2m+1-i}=0,$$

ou bien, en remplaçant les expressions $P^{(2m+1)}_{2m-i+1}$ par leurs valeurs,

$$\sum_{i=1}^{i=m+1}\left\{\alpha_i\times\prod_{a=1}^{a=2m+1}(\lambda i_1 x a_1+\lambda i_2 x a_2)\right\}=0.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Toute involution d'ordre impair n *et de rang* n — 1 *peut se représenter analytiquement par l'égalité à zéro d'une somme de* $\frac{\mathrm{n}+1}{2}$ *produits de* n *facteurs linéaires.*

8. Jusqu'à présent, nous ne nous sommes occupé que des groupes de $k-p$ éléments neutres de première espèce, d'une involution I^n_k.

Les propriétés des groupes neutres d'espèce quelconque sont analogues ; cependant, nous ne sommes pas parvenu à faire cette étude d'une façon définitive, faute d'avoir résolu un problème préliminaire ; nous exposerons néanmoins la méthode qui permettra d'arriver au résultat final.

D'après la définition des groupes d'éléments neutres d'espèce quelconque, un groupe de $k-p$ points de la courbe normale C_n, de l'espace E_n, qui représente un groupe de $k-p$ éléments neutres d'espèce i, joint à l'espace principal E_{n-k-1} de l'involution, ne déterminera pas un espace à $n-p-1$ dimensions, mais un espace à $(n-p-i-1)$ dimensions. Pour rechercher les propriétés de ces groupes d'éléments neutres, il suffira donc de rechercher les propriétés des espaces à $n-p-(i+1)$ dimensions que l'on peut mener par E_{n-k-1}, de façon que ces espaces rencontrent la courbe C_n en $k-p$ points.

Si nous supposons que l'involution est représentée analytiquement de la même façon que dans les paragraphes précédents, tout espace à $n - p - i - 1$ dimensions, passant par E_{n-k-1}, aura pour équations :

$$\lambda_1^{(1)} a1_x + \lambda_2^{(1)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-p-i}^{(1)} \overline{ak-p-i}_x + \lambda_{k-p-i+1}^{(i)} \overline{ak-p-i+1}_x = 0,$$

$$\lambda_1^{(1)} a1_x + \lambda_2^{(2)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-p-i}^{(2)} \overline{ak-p-i}_x + \lambda_{k-p-i+1}^{(2)} \overline{ak-p-i+2}_x = 0,$$

. . . .

$$\lambda_1^{(p+i+1)} a1_x + \lambda_2^{(p+i+1)} a2_x + \cdots + \lambda_{k-p-1}^{(p+i+1)} \overline{ak-p-i}_x + \lambda_{k-p-i+1}^{(p+i+1)} \overline{ak+1}_x = 0;$$

les facteurs λ sont à déterminer par la position de chacun de ces espaces.

Chacune des équations précédentes représente un faisceau, d'ordre $k - p - 1$, d'espaces à $n - 1$ dimensions; les points de rencontre des espaces de ces faisceaux avec la courbe normale C_n sont les groupes de $p + i + 1$ involutions, d'ordre n et de rang $k - p - i$. Ces involutions ont en commun les groupes de l'involution, d'ordre n et de rang $k - p - i - 1$, marquée sur la courbe C_n par les espaces à $n - 1$ dimensions du faisceau d'ordre $k + p - i - 1$ qui a pour équation,

$$\rho_0 a1_x + \rho_1 a2_x + \cdots + \rho_{k-p-i-2} \overline{ak-p-i-2}_x + \rho_{k-p-i-1} \overline{ak-p-i-1}_x = 0.$$

Le problème revient donc à rechercher les propriétés des groupes de $k - p$ éléments communs à $p + i + 1$ involutions d'ordre n et de rang $k - p - i$, qui contiennent les groupes d'une même involution d'ordre n et de rang $k - p - i - 1$.

Étant donnés $k - (i + 1)(p + 1)$ éléments du support de ces involutions, il leur correspond des groupes de $n - k + (i + 1)(p + i)$ éléments, formant $p + i + 1$ involutions d'ordre $n - k + (i + 1)(p + i)$ et de rang $i(p + i)$; ces involutions contiennent les groupes d'une involution d'ordre $n - k + (i + 1)(p + i)$ et de rang $i(p + i) - 1$; elles ont, en plus, des groupes de $i(p + i + 1)$ éléments communs en nombre fini, puisque la somme de leurs rangs est un multiple $i(p+i+1)$ de $p + i$ (II, IV, 4) : soit X le nombre de ces groupes; nous pourrons énoncer le théorème suivant : $k - (i + 1)(p + i)$ *éléments arbitraires du support d'une involution* I_k^n *entrent dans* *un nombre fini* X *de groupes de* k — p *éléments neutres d'espèce* i *de cette involution.*

Le nombre X est, comme nous venons de le faire voir, le nombre des groupes communs à $p + i + 1$ involutions $I^{n-k+(i+1)(p+1)}_{i(p+1)}$, qui appartiennent à un faisceau : la détermination de ce nombre est très compliquée, et, comme nous l'avons déjà dit, nous ne sommes pas parvenu à un résultat satisfaisant.

Les considérations précédentes nous conduisent encore aux théorèmes suivants :

1° *Une involution d'ordre* n *et de rang* k *ne peut avoir des groupes de* k — p *éléments neutres d'espèce* i, *que dans le cas de* $k \geqq (i + 1)(p + i)$. 2° *Une involution, d'ordre* n *et de rang* $(i + 1)(p + i)$, *possède des groupes de* $i(p + i + 1)$ *éléments neutres d'espèce* i *en nombre fini.*

9. Dans ce paragraphe, nous établirons, par un procédé différent, un théorème général sur les involutions d'ordre n et de rang $n - \varphi$, qui nous permettra de former les équations canoniques de certaines involutions.

Soit $E_{\varphi-1}$, l'espace principal d'une involution $I^n_{n-\varphi}$, représentée sur la courbe normale C_n d'un espace à n dimensions.

Considérons cet espace $E_{\varphi-1}$ comme la jonction de φ points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\varphi.$$

ces points étant les points principaux des φ involutions d'ordre n et de rang $n - 1$, dont $I^n_{n-\varphi}$ est l'intersection.

Nous supposerons que le point

$$A_i (i = 1, 2, 3, \ldots, \varphi)$$

a des coordonnées proportionnelles aux quantités

$$ai_0, \quad ai_1, \quad \ldots, \quad ai_n.$$

L'espace à $n - k - 1$ dimensions, qui unit $n - k$ points de la courbe C_n dont les paramètres sont

$$\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}, \quad \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda \overline{n-k}_1}{\lambda \overline{n-k}_2},$$

a pour équations (voir I, *Addition*)

$$\left.\begin{array}{r}
K_0 = z_1 - z_2 P_1^{(n-k)} + z_3 P_2^{(n-k)} - \dots \pm z_{n-k+1} P_{n-k}^{(n-k)} = 0, \\
K_1 = z_2 - z_3 P_1^{(n-k)} + z_4 P_2^{(n-k)} - \dots \pm z_{n-k+2} P_{n-k}^{(n-k)} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_k = z_{k+1} - z_{k+2} P_1^{(n-k)} + z_{k+3} P_2^{(n-k)} - \dots \pm z^{n+1} P_{n-k}^{(n-k)} = 0 ;
\end{array}\right\}$$

nous représentons, comme précédemment, par la notation $P_i^{(n-k)}$, la somme des combinaisons i à i des $n-k$ paramètres des points de la courbe C_n.

Si cet espace doit passer par l'espace $E_{\varphi-1}$, on doit avoir les conditions

$$\begin{array}{llll}
K_0^{(1)} = 0, & K_1^{(1)} = 0, & \dots, & K_k^{(1)} = 0, \\
K_0^{(2)} = 0, & K_1^{(2)} = 0, & \dots, & K_k^{(2)} = 0, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
K_0^{(\varphi)} = 0, & K_1^{(\varphi)} = 0, & \dots, & K_k^{(\varphi)} = 0.
\end{array}$$

Nous représentons par la notation $K_p^{(q)}$ ce que devient K_p quand on y remplace les coordonnées courantes z par les coordonnées du point A_q (p et q peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., k et 1, 2, 3, ..., φ).

De ces équations, nous déduisons les conséquences suivantes :

1° Quand $k < \frac{n-\varphi}{\varphi+1}$, on peut, par un espace à $\varphi - 1$ dimensions, faire passer une $(n - k(\varphi + 1) - \varphi)^{\text{uple}}$ infinité d'espaces à $n - k - 1$ dimensions, rencontrant la courbe normale d'un espace à n dimensions en $n - k$ points;

2° Quand $k = \frac{n-\varphi}{\varphi+1}$, ce qui a lieu quand $n - \varphi$ est un multiple de $\varphi + 1$, on ne peut faire passer par un espace à $\varphi - 1$ dimensions qu'un seul espace à $\frac{\varphi n - 1}{\varphi + 1}$ dimensions, rencontrant la courbe normale d'un espace à n dimensions en $\varphi \frac{n+1}{\varphi+1}$ points;

3° Quand $k > \frac{n-\varphi}{\varphi+1}$, on ne peut mener par un espace à $\varphi - 1$ dimensions, d'espace à $n - k - 1$ dimensions rencontrant la courbe normale d'un espace à n dimensions, que si les coordonnées de φ points A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, \varphi$) de cet espace à $\varphi - 1$

dimensions satisfont aux conditions exprimées par le symbole

$$\left\|\begin{matrix} a1_0 & \dots & a1_1 & \dots & a1_k & \dots & a2_0 & \dots & a2_k & \dots & a\varphi_0 & \dots & a\varphi_k \\ a1_1 & \dots & a1_2 & \dots & a1_{k+1} & \dots & a2_1 & \dots & a2_{k+1} & \dots & a\varphi_1 & \dots & a\varphi_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a1_{n-k} & \dots & a1_{n-k+1} & \dots & a1_n & \dots & a2_{n-k} & \dots & a2_n & \dots & a\varphi_{n-k} & \dots & a\varphi_n \end{matrix}\right\| = 0.$$

Ces théorèmes peuvent être interprétés autrement :

1° *Une involution d'ordre* n *et de rang* $n - \varphi$ *possède une* $(n - k(\varphi + 1) - \varphi)^{\text{uple}}$ *infinité de groupes de* $n - k$ *éléments neutres, quand* $k < \frac{n-\varphi}{\varphi+1}$; *ces groupes forment une involution d'ordre* $n - k$ *et de rang* $n - (1 + \varphi)k - \varphi$;

2° *Une involution d'ordre* n *et de rang* $n - \varphi$ *possède un seul groupe de* $\varphi\frac{n+1}{\varphi+1}$ *éléments neutres, quand* $n + 1$ *est un multiple de* $\varphi + 1$.

10. D'un autre côté, soient les équations d'une involution $I^n_{n-\varphi}$:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv a1_0 P^{(n)}_n + a1_1 P^{(n)}_{n-1} + \cdots + a1_{n-1}P^{(n)}_1 + a1_n P^{(n)}_0 = 0, \\ f_2 &\equiv a2_0 P^{(n)}_n + a2_1 P^{(n)}_{n-1} + \cdots + a2_{n-1}P^{(n)}_1 + a2_n P^{(n)}_0 = 0, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_\varphi &\equiv a\varphi_0 P^{(n)}_n + a\varphi_1 P^{(n)}_{n-1} + \cdots + a\varphi_{n-1}P^{(n)}_1 + a\varphi_n P^{(n)}_0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Par l'espace principal $E_{\varphi-1}$ de cette involution, menons un des espaces à $n - k - 1$ dimensions, rencontrant la courbe normale en $n - k$ points; et représentons par

$$\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2},\quad \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda\overline{n-k}_1}{\lambda\overline{n-k}_2}$$

les paramètres de ces $n - k$ points. Nous aurons les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 a1_i &= \alpha 1_1\left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{n-i} + \alpha 1_2\left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{n-i} + \cdots + \alpha 1_{n-k}\left(\frac{\lambda\overline{n-k}_1}{\lambda\overline{n-k}_2}\right)^{n-i}, \\ \rho_2 a2_i &= \alpha 2_1\left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{n-i} + \alpha 2_2\left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{n-i} + \cdots + \alpha 2_{n-k}\left(\frac{\lambda\overline{n-k}_1}{\lambda\overline{n-k}_2}\right)^{n-i}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \rho_\varphi a\varphi_i &= \alpha\varphi_1\left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{n-i} + \alpha\varphi_2\left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{n-i} + \cdots + \alpha\varphi_{n-k}\left(\frac{\lambda\overline{n-k}_1}{\lambda\overline{n-k}_2}\right)^{n-i}; \end{aligned}\right|$$

i prend les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., n; les facteurs ρ sont des facteurs de proportionnalité et les quantités α des constantes déterminées.

Dès lors, les équations de l'involution pourront s'écrire :

$$f_1 \equiv \sum_1^n \mathrm{P}_{n-i}^{(n)} \left[\alpha 1_1 \left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{n-i} + \alpha 1_2 \left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{n-i} + \cdots + \alpha 1_{n-k} \left(\frac{\overline{\lambda n - k_1}}{\overline{\lambda n - k_2}}\right)^{n-i} \right] = 0,$$

. . . .

. . . .

$$f_\varphi \equiv \sum_1^n \mathrm{P}_{n-i}^{(n)} \left[\alpha\varphi_1 \left(\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2}\right)^{n-i} + \alpha\varphi_2 \left(\frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2}\right)^{n-i} + \cdots + \alpha\varphi_{n-k} \left(\frac{\overline{\lambda n - k_1}}{\overline{\lambda n - k_2}}\right)^{n-i} \right] = 0;$$

ou bien

$$0 = f_1 \equiv \sum_1^{n-k} \alpha 1_i \mathrm{V}_i = \sum_1^{n-k} \alpha 1_i (\lambda i_1 x 1_1 + \lambda i_2 x 1_2)(\lambda i_1 x 2_1 + \lambda i_2 x 2_2) \times \ldots$$

$$\ldots (\lambda i_1 x n_1 + \lambda i_1 x n_2),$$

$$0 = f_2 \equiv \sum_1^{n-k} \alpha 2_i \mathrm{V}_i = \cdots \quad \text{etc.},$$

. . . .

$$0 = f_\varphi \equiv \sum_1^{n-k} \alpha\varphi_i \mathrm{V}_i = \cdots \quad \text{etc.}$$

Nous appelons le produit

$$\mathrm{V}_i = \prod_{q=1}^{n} (\lambda i_1 x q_1 + \lambda i_2 x q_2),$$

produit d'ordre n, *et* $\frac{\lambda i_1}{\lambda i_2}$, *la racine de ce produit;* dans le cas de $k < \frac{n-\varphi}{\varphi+1}$, nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Toute involution d'ordre n *et de rang* n — φ *peut se définir analytiquement d'une* $(\mathrm{n} - \mathrm{k}(\varphi + 1) - \varphi)^{\text{uple}}$ *infinité de manières, par l'égalité à zéro de* φ *sommes de* n — k *mêmes produits d'ordre* n.

Les groupes des racines de ces produits forment une involution d'ordre $n - k$ et de rang $n - (1 + \varphi) - \varphi$, représentée par les $\varphi(k + 1)$ équations suivantes :

$$k_i^{(1)} = a1_i - a1_{i+1}\mathrm{P}_1^{(n-k)} + \cdots \pm a1_{n\ k+i}\mathrm{P}_{n-k}^{(n-k)} = 0,$$
$$k_i^{(2)} = a2_i - a2_{i+1}\mathrm{P}_1^{(n-k)} + \cdot\cdot \pm a2_{n-k+i}\mathrm{P}_{n-k}^{(n-k)} = 0,$$

. . . .

$$k_i^{(\varphi)} = a\varphi_i - a\varphi_{i+1}\mathrm{P}_1^{(n-k)} + \cdots \pm a\varphi_{n-k+1}\mathrm{P}_{n-k}^{(n-k)} = 0,$$

i variant de 0 à k.

En faisant usage de la transformation indiquée ci-dessus (II, II, 5), nous pouvons remplacer les équations précédentes par l'unique relation

$$\sum_{i=1}^{p-r} \lambda_i \begin{vmatrix} x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & \mp x_2^{p-r}x_1^r & \pm x_2^{p-r-i}x_1^{r+i} \\ a1_0 & a1_1 & \dots & a1_2 & a1_{r+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a1_k & a1_{k+1} & \dots & a1_{r+k} & a1_{r+k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\varphi_0 & a\varphi_1 & \dots & a\varphi_2 & a\varphi_{r+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\varphi_k & a\varphi_{k+1} & \dots & a\varphi_{r+k} & a\varphi_{r+k+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette équation, les λ désignent des paramètres arbitraires, et nous avons posé pour abréger :

$$p = n - k, \quad r = \varphi(k+1) - 1.$$

En particulier, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Toute involution d'ordre n *et de rang* n — φ *peut s'exprimer d'une seule façon par l'égalité à zéro de* φ *sommes de* $\varphi\frac{n+1}{\varphi+1}$ *mêmes produits d'ordre* n, *quand* n + 1 *est un multiple de* $\varphi + 1$.

Les racines de ces produits sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} x_2^\mu & -x_2^{\mu-1}x_1 & \dots & \mp x_2 x_1^{\mu-1} & \pm x_1^\mu \\ a1_0 & a1_1 & \dots & a1_{\mu-1} & a1_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a1_{\frac{n-\varphi}{\varphi+1}} & a1_{\frac{n-\varphi}{\varphi+1}+1} & \dots & a1_{n-1} & a1_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\varphi_0 & a\varphi_1 & \dots & a\varphi_{\mu-1} & a\varphi_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\varphi_{\frac{n-\varphi}{\varphi+1}} & a\varphi_{\frac{n-\varphi}{\varphi+1}+1} & \dots & a\varphi_{n-1} & a\varphi_n \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est le *canonizant* du système.

VII

Involutions conjuguées.

1. Soit une involution d'ordre n et de rang k, I_k^n, définie par l'équation

$$\lambda_1 a1_x^n + \lambda_2 a2_x^n + \cdots + \lambda_k ak_x^n + \lambda_{k+1} \overline{ak+1}_x^n = 0;$$

l'espace principal de cette involution, représentée sur la courbe normale C_n de l'espace à n dimensions, est l'intersection de $k+1$ espaces à $n-1$ dimensions dont les équations sont :

$$a1_x = 0, \quad a2_x = 0, \quad \ldots, \quad ak_x = 0, \quad \overline{ak+1}_x = 0.$$

Nous pouvons considérer cet espace à $n-k-1$ dimensions comme étant l'espace complémentaire d'une involution d'ordre n et de rang $n-k-1$, I_{n-k-1}^n, représentée sur la même courbe normale C_n.

Nous appellerons les deux involutions I_k^n et I_{n-k-1}^n, *involutions conjuguées.*

D'après ce que nous avons vu précédemment, l'espace principal et l'espace complémentaire d'une involution I_k^n, représentée sur une courbe C_n, sont réciproquement polaires par rapport à cette courbe; nous en déduisons la propriété suivante :

Deux involutions du même ordre sont conjuguées, quand l'espace principal de l'une est l'espace complémentaire de l'autre, et vice versa.

2. Cela posé, le pôle de l'espace à $n-1$ dimensions $ai_x = 0$, par rapport à la courbe C_n, a pour équations :

$$\binom{n}{0}\frac{z_1}{ai_n} = -\binom{n}{1}\frac{z_2}{ai_{n-1}} = \cdots = \pm\binom{n}{n}\frac{z_{n+1}}{ai_0};$$

l'espace complémentaire de l'involution I_k^n est la jonction de $k+1$ pôles analogues $(i = 1, 2, 3, \ldots, k+1)$. Or, chacun de ces pôles est le point principal d'une involution d'ordre n et de rang $n-1$, ${}^{(i)}I^n_{n-1}$, dont l'équation est

$$\varphi_i \equiv ai_n Q^{(n)}_n + \frac{ai_{n-1}}{\binom{n}{1}} Q^{(n)}_{n-1} + \cdots + \frac{ai_1}{\binom{n}{n-1}} Q^{(n)}_1 + ai_0 Q^{(n)}_0 = 0.$$

L'ensemble des $k+1$ équations $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k+1)$ représente une involution d'ordre n et de rang $n-k-1$, qui est l'involution conjuguée de I^n_k.

Si nous employons les formules de transformations que nous avons indiquées plus haut (II, II, 5 et 6), l'involution conjuguée de I^n_k pourra se représenter par le faisceau, d'ordre $n-k-1$, de formes binaires d'ordre n, dont l'équation est :

$$\sum_1^{n-k} \lambda_i \begin{vmatrix} x_1^n & \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_1 & \ldots & \binom{n}{k} x_1^{n-k} x_2^k & \binom{n}{k+i} x_1^{n-k-i} x_2^{k+i} \\ a1_0 & a1_1 & \ldots & a1_k & a1_{k+i} \\ a2_0 & a2_1 & \ldots & a2_k & a2_{k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ak+1_0 & ak+1_1 & \ldots & ak+1_k & ak+1_{k+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'involution I^n_k était définie analytiquement par $n-k$ formes n-linéaires symétriques égalées à zéro, on pourrait de même trouver les deux systèmes de représentation analytique de son involution conjuguée.

3. Si l'involution I^n_k possède un élément n^{uple}, par son espace principal E_{n-k-1} on peut mener un espace à $n-1$ dimensions, osculateur à la courbe normale C^1_n en un point A; par suite son espace polaire, qui est l'intersection de $n-k$ espaces à $n-1$ dimensions, polaires de $n-k$ points de E_{n-k-1}, passera nécessairement par le point A.

L'espace complémentaire de l'involution passera donc par le point A, et par conséquent cet espace pourra être considéré comme l'espace principal d'une involution I^n_{n-k-1} qui se décompose en un élément fixe A et en une involution I^{n-1}_{n-k-1}. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

L'involution conjuguée d'une involution d'ordre n *et de rang* k, *qui possède un élément* n^{uple}, *se décompose en un élément fixe et en une involution d'ordre* n — 1 *et de rang* n — k — 1 (*).

On pourrait démontrer, de la même façon, le théorème général suivant :

L'involution conjuguée d'une involution d'ordre n *et de rang* k, *qui possède* p *éléments* n^{uples}, *se décompose en* p *éléments fixes et en une involution d'ordre* n — p *et de rang* n — k — 1.

4. Soit une involution $I^{n'}_{k'}$, $n' < n$, représentée dans l'espace à n dimensions par son espace axial; cet espace axial est, comme nous l'avons vu, un espace à $n - k' - 1$ dimensions $E_{n-k'-1}$, qui rencontre la courbe normale C_n de l'espace à n dimensions en $n - n'$ points

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{n-n'}.$$

Soit $E_{k'}$ l'espace à k' dimensions, polaire de l'espace $E_{n-k'-1}$, par rapport à la courbe C_n; par $E_{k'}$ on peut faire passer $n - n'$ espaces à $n - 1$ dimensions, osculateurs à la courbe : ces $n - n'$ espaces sont les $n - n'$ espaces osculateurs aux $n - n'$ points A_i. L'espace $E_{k'}$ définira donc une involution d'ordre n et de rang $n - k' - 1$, possédant $n - n'$ éléments n^{uples}.

Comme les $n - n'$ points A_i peuvent être pris arbitrairement sur la courbe C_n, nous pourrons énoncer le théorème suivant, qui est le réciproque des précédents :

A une involution d'ordre n' *et de rang* k', *il correspond une* $(n - n')^{\text{uple}}$ *infinité d'involutions conjuguées d'ordre* n *et de*

(*) M. *Le Paige* a donné ce théorème dans le cas particulier de $k = 1$, $n = 3$: *Ueber conjugirte Involutionen* (Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. zu Wien, 1881).

rang n — k′ — 1 ; *ces involutions conjuguées possèdent* n — n′ *éléments* n^{uples}.

5. De la représentation de deux involutions conjuguées, il résulte les propriétés suivantes :

Si une involution d'ordre n *et de rang* k *contient les groupes d'une involution d'ordre* n *et de rang* φ, *l'involution conjuguée à la première sera contenue dans l'involution conjuguée à la seconde, et vice versa. Si une involution* $I_{k'}^{n'}$ *est contenue dans une involution d'ordre* n *et de rang* k, *l'involution conjuguée de cette dernière sera contenue dans une involution d'ordre* n *et de rang* n — k′ — 1, *possédant* n — n′ *élements* n^{uples}.

Supposons que l'involution I_k^n possède un élément $(k+r+1)^{uple}$; l'espace à $k+r$ dimensions, osculateur à la courbe au point A qui représente cet élément multiple, a pour espace polaire un espace à $n-k-r-1$ dimensions, également osculateur à la courbe C_n au point A. Or, l'espace E_{k+r} rencontre l'espace principal de I_k^n en $r+1$ points, formant un espace à r dimensions; donc, l'espace $E_{n-k-r-1}$ sera situé, avec l'espace complémentaire E_k de I_k^n, dans un même espace à $n-r-1$ dimensions.

En particulier, si $r=1$, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Deux involutions conjuguées placées sur un même support ont les mêmes éléments multiples.

Si une involution I_k^n possède k' éléments n^{uples}, son involution conjuguée se décompose en k' éléments fixes et une involution $I_{n-k-1}^{n-k'}$; or, l'involution $I_{n-k-1}^{n-k'}$ possède $(n-k)(k-k'+1)$ éléments $(n-k)^{uples}$, qui sont les éléments $(k+1)^{uples}$ de l'involution I_k^n ; en conséquence, nous obtenons la propriété suivante : *Une involution* I_k^n *qui possède* k′ *éléments* n^{uples} *ne possède que* (n — k)(k — k′ + 1) *éléments* $(k+1)^{\text{uples}}$.

6. Soit une involution I_k^n et soient E_{n-k-1} et E_k, l'espace principal et l'espace complémentaire de cette involution.

Supposons que l'involution I_k^n ait en commun, avec son involution conjuguée I_{n-k-1}^n, un groupe de n éléments; dans ce cas, les deux espaces E_k et E_{n-k-1}, étant situés dans un même espace à $n-1$ dimensions E_{n-1} (cet espace est la jonction des n points de la courbe normale C_n qui représentent les éléments du groupe commun), se coupent en un point A. Or, nous avons vu que les deux espaces E_k et E_{n-k-1} sont réciproquement polaires par rapport à la courbe C_n; donc, A est le pôle de l'espace E_{n-1}, par rapport à cette même courbe.

Remarquons que le point A, pôle de E_{n-1}, est situé dans cet espace E_{n-1}; or, si n est pair, cela ne peut avoir lieu que si l'espace E_{n-1} est osculateur à la courbe C_n (puisque le pôle d'un espace à $n-1$ dimensions, par rapport à une courbe normale, ne peut être situé dans cet espace, si n est pair, que si cet espace E_{n-1} est osculateur à la courbe).

S'il en est ainsi, le groupe commun aux deux involutions I_k^n et I_{k-1}^n doit être un élément n^{uple} de ces deux involutions; mais alors ces deux involutions sont l'une et l'autre décomposables : cela résulte immédiatement d'un théorème démontré plus haut (II, VIII, 3).

Donc : *Une involution d'ordre pair ne peut avoir avec son involution conjuguée un groupe d'éléments en commun, à moins que ces éléments ne coïncident, et alors l'involution et sa conjuguée sont décomposables.*

Il suffira donc, dans ce qui suit, de considérer les involutions dont l'ordre n est un nombre impair.

7. Soient E_1 et E_{n-2} l'espace complémentaire et l'espace principal d'une involution d'ordre n et du premier rang, I_1^n.

Si I_1^n a en commun avec son involution conjuguée I_{n-2}^n un groupe de n éléments, les deux espaces E_1 et E_{n-2} auront un point commun A; il y a plus : l'espace E_1 est situé dans l'espace E_{n-2}.

En effet, tout espace à $n-1$ dimensions, E_{n-1}, passant par E_{n-2} a son pôle P situé dans cet espace E_{n-1} et dans l'espace E_1; or, cet espace E_{n-1} contient déjà le point A de E_1; puisqu'il contient un second point P, il contient tout cet espace.

Puisque l'espace E_{n-1} est quelconque, il s'ensuit que E_{n-2} doit contenir entièrement E_1.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute involution d'ordre impair n, *et du premier ou du* n — $2^{\text{ième}}$ *rang, qui a en commun avec son involution conjuguée un groupe de* n *éléments, est contenue dans celle-ci, ou bien contient celle-ci.*

8. Soient E_{n-3} et E_2, l'espace principal et l'espace complémentaire d'une involution I_2^n ; si l'involution I_2^n a en commun avec son involution conjuguée I_{n-3}^n un groupe de n éléments, les deux espaces E_2 et E_{n-3} seront situés dans un même espace à $n-1$ dimensions E_{n-1}, et par conséquent ces deux espaces se couperont en un point A ; ce point A est le pôle par rapport à la courbe normale de l'espace E_{n-1}.

Donc : *Une involution d'ordre impair* n, *et du deuxième ou du* n — $3^{\text{ième}}$ *rang, qui a en commun avec sa conjuguée un groupe de* n *éléments, est contenue avec celle-ci dans une même involution d'ordre* n *et de rang* n — 1.

Tout espace E_1, passant par A et situé dans P_2, est l'espace principal d'une involution I_{n-2}^n dont l'espace complémentaire passe par A ; d'après ce que nous avons vu, cette involution I_{n-2}^n contient son involution conjuguée. De même, tout espace E_{n-2}, passant par E_{n-3}, est l'espace principal d'une involution I_1^n dont l'espace complémentaire passe par A; en conséquence, cette involution I_1^n est située dans son involution conjuguée. Nous pourrons donc énoncer les deux théorèmes suivants :

Toute involution d'ordre impair n *et du second rang, qui a en commun avec son involution conjuguée un groupe de* n *éléments, contient une infinité d'involutions d'ordre* n *et du premier rang, qui sont contenues dans leurs involutions conjuguées.*

Toute involution d'ordre impair n *et de rang* n — 3, *qui a en commun avec son involution conjuguée un groupe de* n *éléments, est contenue dans une infinité d'involutions d'ordre* n *et de rang* n — 2, *contenant leurs involutions conjuguées.*

9. Supposons maintenant que deux involutions conjuguées I_2^n et I_{n-3}^n aient en commun les groupes d'une involution d'ordre n et du premier rang ; dans ce cas, les deux espaces E_2 et E_{n-2} sont situés dans un espace E_{n-2}, espace principal de l'involution commune; par conséquent, les deux espaces E_2 et E_{n-3} se coupent en une droite, espace complémentaire de l'involution commune.

Donc : *Toute involution d'ordre* n *et du second rang, qui a en commun avec son involution conjuguée les groupes d'une involution d'ordre* n *et du premier rang, est contenue dans l'involution conjuguée à cette dernière.*

De plus, les deux espaces E_2 et E_{n-3} coïncident (*).

En effet, tout espace à $n - 1$ dimensions E_{n-1}, passant par E_{n-3}, a son pôle P situé dans l'espace E_{n-1} et dans l'espace E_2; or, l'espace E_{n-1} contient déjà une droite de E_2; il contient, par conséquent, cet espace E_2 tout entier. Puisque l'espace E_{n-1} est quelconque, il faut nécessairement que les deux espaces E_2 et E_{n-3} coïncident. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Toute involution, d'ordre impair n *et du second ou du* n — 3^ième^ *rang, qui a en commun avec son involution conjuguée les groupes d'une involution d'ordre* n *et du premier rang, est située dans cette involution conjuguée ou bien y est contenue.*

10. Plus généralement, soient E_{n-k-1} et E_k l'espace principal et l'espace complémentaire d'une involution d'ordre n et de rang k, I_k^n.

Supposons d'abord que cette involution I_k^n ait en commun avec son involution conjuguée I_{n-k-1}^n un groupe de n éléments; les deux espaces E_k et E_{n-k-1} ont, dans ce cas, un point commun A.

Toute droite de l'espace E_k qui passe par A est située dans son espace polaire correspondant et définira, par conséquent, l'espace principal d'une involution I_{n-2}^n qui contient son involution conjuguée.

(*) Nous appelons espaces coïncidents des espaces E_h, E_k, tels que E_h est compris dans E_k.

De même, tout espace E_{n-2} passant par E_{n-k-1} contient sa droite polaire et définira l'espace principal d'une involution I_1^n qui est contenue dans son involution conjuguée. Nous pourrons donc énoncer les théorèmes suivants :

Une involution d'ordre n *et de rang* k, *qui a en commun avec son involution conjuguée un groupe de* n *éléments, contient une* k — 1$^{\text{uple}}$ *infinité d'involutions d'ordre* n *et du premier rang, contenues dans leurs involutions conjuguées.*

Une involution d'ordre n *et de rang* k, *qui possède un groupe de* n *éléments en commun avec son involution conjuguée, est située dans une* k — 1$^{\text{uple}}$ *infinité d'involutions d'ordre* n *et de rang* n — 2, *qui contiennent leurs involutions conjuguées.*

11. Supposons maintenant que deux involutions conjuguées I_k^n et I_{n-k-1}^n aient en commun les groupes d'une involution d'ordre n et de rang p, I_p^n.

Dans ce cas, les deux espaces E_k et E_{n-k-1}, espaces principaux de ces deux involutions conjuguées, sont situés dans un espace à $n-p-1$ dimensions, E_{n-p-1}, qui est l'espace principal de I_p^n et, par conséquent, ces deux espaces se rencontrent en un espace à p dimensions E_p, espace complémentaire de I_p^n ; nous en déduisons d'abord ce théorème :

Si deux involutions conjuguées ont en commun les groupes d'une involution, cette dernière est contenue dans son involution conjuguée.

Tout espace à $p+1$ dimensions, passant par E_p et situé dans E_k, est contenu dans son espace correspondant et, par conséquent, définit l'espace principal d'une involution I_{n-p-2}^n contenant son involution conjuguée.

En conséquence : *Une involution d'ordre impair* n *et de rang* k, *qui a en commun avec son involution conjuguée les groupes d'une involution d'ordre* n *et de rang* p, *est contenue dans une* (k — p)$^{\text{uple}}$ *infinité d'involutions d'ordre* n *et de rang* n — p — 2, *contenant leurs involutions conjuguées.*

On démontrerait que, dans les mêmes conditions, *l'involu-*

tion I_k^n *contient une* (k — p)^{uple} *infinité d'involutions d'ordre* n *et de rang* p + 1, *contenues dans leurs involutions conjuguées.*

12. Supposons enfin que deux involutions conjuguées I_k^n et I_{n-k-1}^n aient en commun les groupes d'une involution I_{k-1}^n; dans ce cas, les deux espaces E_{n-k-1} et E_k sont situés dans un espace à $n-k$ dimensions E_{n-k}, qui est l'espace principal de l'involution I_{k-1}^n; donc ils se coupent en un espace à k — 1 dimensions E_{k-1}, qui est l'espace complémentaire de l'involution I_{k-1}^n; nous en déduisons ce théorème :

Si deux involutions conjuguées I_k^n *et* I_{n-k-1}^n *ont en commun les groupes d'une involution* I_{k-1}^n, *cette dernière involution est contenue dans son involution conjuguée.*

De la même façon que pour le cas de $k=1$ et de $k=2$, on démontrerait que les deux espaces E_k et E_{n-k-1} sont contenus l'un dans l'autre.

Donc : *Toute involution d'ordre impair* n *et de rang* k, *qui a en commun avec son involution conjuguée les groupes d'une involution d'ordre* n *et de rang* k — 1, *est contenue dans son involution conjuguée ou contient son involution conjuguée.*

CHAPITRE III.

I

Détermination d'une involution I_k^n.

1. Nous avons vu que $k+1$ groupes de n éléments déterminent une involution I_k^n, et qu'étant donnés k éléments d'un $k+2^{ième}$ groupe, il est possible de trouver les $n-k$ éléments qui complètent ce groupe; la solution de cette question dépend d'un problème du degré $n-k$, puisque cette solution revient à rechercher les racines d'une équation d'ordre n, à k indéterminées, connaissant k de ces racines.

Étant donnés $k+1$ *groupes d'une involution d'ordre* n *et de rang* k, *complètement indépendants entre eux,*

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_{k+1};$$

pour déterminer les $n-k$ *éléments correspondant à* k *éléments donnés,*

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_k,$$

il revient au même de compléter les groupes de deux involutions de rangs inférieurs.

En effet, par exemple, prenons k des groupes donnés

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_k;$$

ils déterminent une involution d'ordre n et de rang $k-1$; à $k-1$ des éléments donnés, par exemple, aux éléments

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_{k-1},$$

il correspond $n - k + 1$ éléments, dans cette involution I^n_{k-1} :

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{n-k+1}.$$

Les n éléments

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_{k-1}, \quad h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{n-k+1}$$

appartiennent évidemment à l'involution cherchée, I^n_k.

De plus, aux $k - 1$ éléments

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_{k-1}$$

il correspond dans l'involution I^n_k des groupes de $n - k + 1$ éléments formant une involution d'ordre $n - k + 1$ et du premier rang; les $n - k + 1$ éléments

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{n-k+1}$$

forment un groupe de cette involution.

Prenons encore k groupes parmi les $k + 1$ groupes donnés; par exemple,

$$G_1, \quad G_3, \quad \ldots, \quad G_k, \quad G_{k+1}$$

ils déterminent une seconde involution I^n_{k-1}. Aux éléments

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_{k-2}, \quad l_{k-1},$$

il correspond, dans cette dernière involution, $n - k + 1$ éléments

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{n-k+1};$$

les n éléments

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{n-k+1}, \quad l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_{k-2}, \quad l_{k-1}$$

forment un groupe de l'involution I^n_k; de plus, les $n - k + 1$ éléments

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{n-k+1}$$

forment un second groupe de l'involution I^{n-k+1}_1.

Les deux groupes

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{n-k+1},$$

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{n-k+1}$$

déterminent l'involution I_1^{n-k+1}; si nous construisons dans cette involution le groupe de $n - k$ éléments correspondant à l'élément l_k, ce groupe de $n - k$ éléments sera le groupe correspondant aux k éléments donnés dans l'involution I_k^n, caractérisée par les $k + 1$ groupes $G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}$.

Le problème revient donc à la détermination de deux involutions d'ordre n et de rang $k - 1$, et à la détermination d'une involution d'ordre $n - k + 1$ et du premier rang.

De la même façon, la détermination de chacune des involutions d'ordre n et de rang $k - 1$ revient à la détermination de deux involutions d'ordre n et de rang $k - 2$, et à la détermination d'une involution d'ordre $n - k + 2$ et du premier rang. En continuant de la sorte, nous arrivons à ce résultat, que la détermination d'une involution d'ordre n et de rang k revient à la détermination d'involutions du premier rang (*).

2. Comme exemples, nous allons exposer brièvement les constructions dans le plan des involutions cubiques représentées sur un support donné; nous pouvons toujours supposer que ce support est une conique ou, plus particulièrement encore, un cercle. Si le support était une courbe unicursale quelconque, on pourrait, par un nombre convenable de sections et projections, ramener les points de ce support à correspondre uniformément aux points de la conique ou du cercle.

Les droites qui unissent deux à deux les points des ternes d'une involution cubique du premier rang, marquée par les points d'une courbe du second degré C_2, *enveloppent une courbe de la seconde classe,* que nous appellerons *courbe d'involution.*

En effet, toutes les droites du plan qui passent par un point P

(*) Voir le Mémoire de M. *Weyr* (*loc. cit.*, p. 58).

quelconque marquent sur la courbe C_2 des couples de points formant une involution I_1^2 (I, II, 1, 2, 3); cette involution a en commun avec l'involution I_1^3 des couples au nombre de deux.

Ces couples correspondent évidemment aux tangentes de la courbe d'involution qui passent par le point P; si nous remarquons qu'une involution I_1^3 est déterminée par deux ternes d'éléments correspondants, nous pourrons énoncer cette propriété bien connue :

Si deux triangles sont inscrits à une même conique C_2, *ils sont circonscrits à une même conique* σ_2, *et il existe une infinité d'autres triangles inscrits à* C_2 *et circonscrits à* σ_2.

Ce théorème a conduit M. *Le Paige* à un premier mode de construction de l'involution I_1^3 (*).

Soient donc deux groupes de trois points, x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, situés sur une courbe du second degré C_2, et un point x_3; il s'agit de déterminer les deux points y_3 et z_3 complétant le groupe défini par le point x_3 dans l'involution cubique qui possède les deux groupes donnés.

D'après ce que nous venons de voir, il existe une conique σ_2 inscrite aux deux triangles $(x_1y_1z_1)$ et $(x_2y_2z_2)$; si de x_3 nous menons les deux tangentes à cette courbe σ_2, ces deux droites rencontreront la courbe C_2 en deux points y_3 et z_3, qui sont les points cherchés.

Il est facile de s'assurer que si r_1, r_2, r_3, r_4 sont les quatre points d'intersection des deux courbes C_2 et σ_2, les quatre tangentes à σ_2 en ces points coupent la courbe C_2 aux quatre points doubles de l'involution. Ces points sont, du reste, les points de contact sur C_2 des quatre tangentes communes aux deux courbes C_2 et σ_2.

3. Supposons que les deux ternes x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 soient deux groupes de trois points d'une droite d. Nous pou-

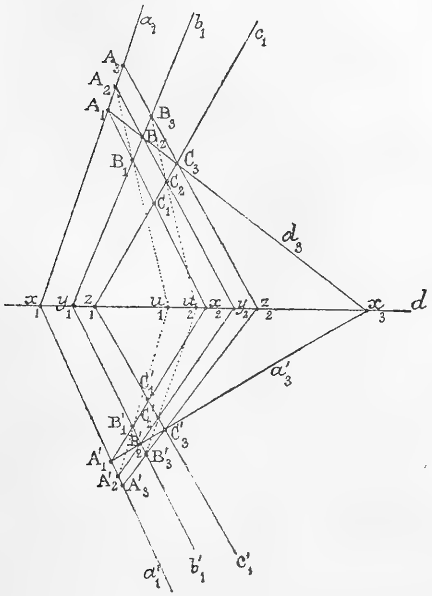
(*) Voir les *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* de M. *Le Paige*, pp. 69 et suivantes.

vons construire les ternes de l'involution en faisant usage de la représentation suivante :

Les courbes du troisième degré, qui passent par huit points fixes, rencontrent une droite fixe d *en des groupes de trois points formant une involution cubique du premier rang.*

Cette propriété est évidente, si l'on remarque qu'une cubique plane est déterminée par neuf quelconques de ses points.

Pour construire l'involution cubique sur la droite d, nous



choisirons les huit points de base du faisceau de cubiques, de telle sorte que les deux cubiques qui passent par les points x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, soient décomposables en trois droites, et que la cubique, qui donne avec le point x_3 les deux points inconnus y_3 et z_3, soit formée d'une droite et d'une conique.

Il suffira pour cela d'effectuer les constructions suivantes :

Par x_1, y_1, z_1, menons trois droites quelconques a_1, b_1, c_1, et par x_3, une droite quelconque a_3 rencontrant les droites a_1, b_1, c_1 en A_1, B_2, C_3. Les droites $a_2 \equiv (A_1x_2)$, $b_2 \equiv (B_2y_2)$,

$c_2 \equiv (C_3 z_2)$ rencontrent respectivement les trois couples de droites

$$b_1,\ c_1;\quad a_1,\ c_1;\quad a_1,\ b_1$$

en des points

$$B_1,\ C_1;\quad A_2,\ C_2;\quad A_3,\ B_3.$$

Les six points A_2, A_3, B_1, B_3, C_1, C_2 sont sur une conique, puisque l'hexagone $A_2A_3B_3B_1C_1C_2A_2$ est tel, que les intersections des couples de côtés opposés

$$A_2A_3,\ B_1C_1;\quad A_3B_3,\ C_1C_2;\quad B_3B_1,\ A_2C_2$$

sont trois points A_1, B_2, C_3 situés en ligne droite. La conique C_2, circonscrite à cet hexagone, coupe la droite d en deux points réels ou imaginaires conjugués, qui sont les deux points y_3 et z_3 cherchés.

Le problème revient donc à construire les intersections de la droite d avec une conique dont on connaît six points.

Remarquons que le quadrilatère dont les sommets sont A_2A_3, B_1B_3 est inscrit à la conique inconnue C_2; donc les côtés opposés de ce quadrilatère,

$$A_2A_3,\quad B_1B_3,\quad A_3B_3,\quad A_2B_1,$$

et la conique C_2 rencontrent la droite d en six points

$$x_1,\ y_1;\quad z_2,\ u_1;\quad y_3,\ z_3$$

formant trois couples d'une involution quadratique I_1^2.

Le point u_1 de la droite d est indépendant du choix des droites a_1, b_1, c_1, a_3; en effet, le point u_1 est le point correspondant de x_3 dans l'involution quadratique qui est définie par les couples

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2.$$

Cela résulte immédiatement de l'inspection de la figure.

De même, les couples des côtés opposés du quadrilatère $B_3B_1C_2C_1$,

$$B_3B_1,\ C_1C_2;\quad B_1C_1,\ B_3C_2$$

et la conique C_2 rencontrent la droite d en six points, formant trois couples

$$y_1,\ z_1;\quad x_2,\ u_2;\quad y_3,\ z_3,$$

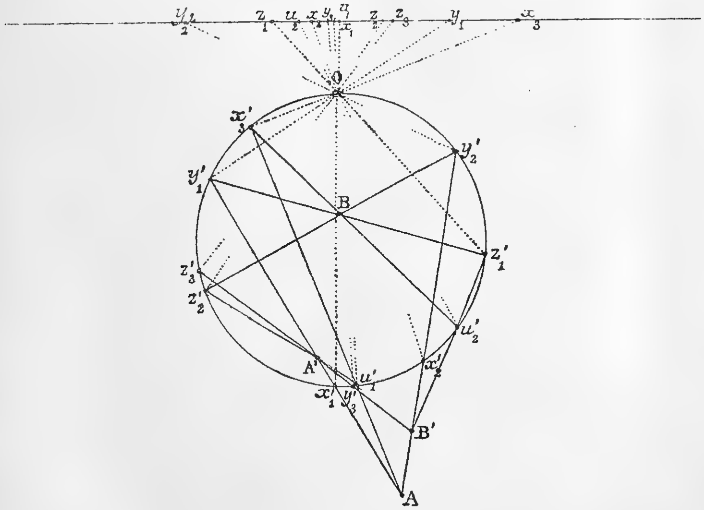
d'une même involution quadratique J_1^2.

Le point u_2 de la droite d est, de même que le point u_1, indépendant du choix des droites a_1, b_1, c_1, a_3.

De ce qui précède, il résulte que les deux points y_3, z_3 sont les points communs aux deux involutions I_1^2, J_1^2; la résolution de ce problème dépend d'une question du second degré; par conséquent, il faudra transporter les éléments déterminatifs sur un support du second degré quelconque.

Voici donc les constructions à effectuer :

Prenons une courbe du second degré quelconque, par exemple un cercle, et d'un point O de cette courbe projetons les points x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 et x_3 de la droite d en des points x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2', x_3'.

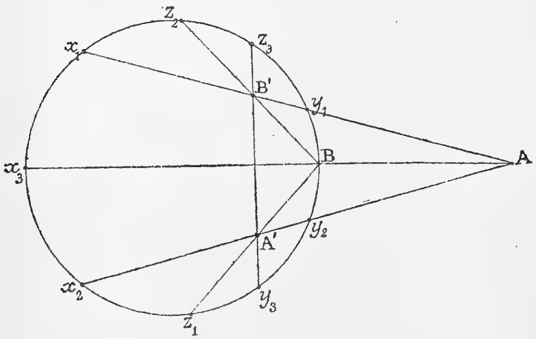


Les droites $(x_1'y_1')$ et $(x_2'y_2')$ se coupent en un point A; les droites $(y_1'z_1')$ et $(y_2'z_2')$ se coupent en un point B. Les droites

Ax'_3 et Bx'_3 rencontrent la courbe en u'_1 et u'_2; les droites $(z'_2u'_1)$ et $(z'_1u'_2)$ rencontrent respectivement les droites $(x'_1y'_1)$ et $(x'_2y'_2)$ en des points A′ et B′ : la droite A′B′ coupe la courbe en deux points, y'_3 et z'_3, qui, projetés du point O sur la droite d, donnent deux points, y_3 et z_3, complétant le groupe défini par le point x_3 dans l'involution I_1^3 déterminée par les ternes x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2.

4. M. *Le Paige* a donné un second mode de représentation de l'involution I_1^3 sur une conique; voici la propriété sur laquelle cette représentation est basée : *les coniques d'un faisceau dont un des points de base est situé sur la conique-support rencontrent cette courbe en des ternes de points formant une involution cubique du premier rang.*

Étant donnés deux ternes, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, d'une involution I_1^3, voici les constructions indiquées par M. *Le Paige* pour compléter le terne défini par un point x_3 :



Les droites (x_1y_1), (x_2y_2) se coupent en un point A, et la droite (Ax_3) rencontre la conique-support en un point B. Les droites (Bz_1), (Bz_2) coupent respectivement les droites (x_2y_2) et (x_1y_1) des points A′, B′ : la droite A′B′ rencontre la conique-support aux deux points cherchés y_3, z_3; en effet, les trois couples de droites

$$(A'B'),\ (Ax_3);\quad (x_2y_2),\ (z_2B);\quad (x_1y_1),\ (z_1A')$$

constituent trois coniques décomposables passant par quatre points fixes A, A′, B, B′, dont l'un, B, est sur la courbe-support.

Ces constructions sont encore possibles quand chacun des ternes donnés est composé de deux points imaginaires conjugués et d'un point réel, puisque les droites qui unissent les couples imaginaires conjugués sont toujours réelles et se coupent donc en un point réel A.

Remarquons que la droite (A′B′), quand le point x_3 parcourt la conique, enveloppe une courbe de la seconde classe; cette conique d'involution permettra, comme précédemment, de déterminer les points doubles de l'involution.

5. Voici encore les constructions relatives aux involutions cubiques du second rang, qui ont été indiquées également par M. *Le Paige :*

Étant donnés trois ternes, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, *d'une* I_2^3, *compléter le terne défini par deux éléments* x_4, y_4; nous supposerons, comme précédemment, que les éléments de chaque terne sont les points d'une conique.

Au point x_4 il correspond, dans les deux involutions I_1^3, possédant les ternes

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2\quad \text{et}\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_3,\ y_3,\ z_3$$

des couples

$$y_3'z_3' \quad \text{et} \quad y_4'z_4'.$$

Soit I_1^2 l'involution quadratique qui possède ces couples : le point z_4, correspondant de y_4 dans cette involution quadratique, sera le point cherché.

D'où les constructions suivantes : les droites (x_1y_1), (x_2y_2) se coupent en A; Ax_4 coupe la conique en B; (Bz_1) et (Bz_2) rencontrent respectivement (x_2y_2) et (x_1y_1) en A′ et B′. Les droites (x_1y_1), (x_3y_3) se coupent en A_1 ; (A_1x_4) coupe la conique en B_1; (B_1z_1) et (B_1z_3) rencontrent respectivement (x_3y_3) et (x_1y_1) en A_1' et B_1'. Les deux droites (A′B′), $(A_1'B_1')$ se coupent en un point t;

la droite (ty_4) rencontre la courbe au point Z_4, qui complète le groupe défini par les deux éléments y_4 et z_4.

Si nous déterminons un second point t_1, analogue à t, en employant un point x_5 quelconque de la courbe, la droite tt_1 rencontrera cette courbe en deux points réels, ou imaginaires conjugués, qui sont les éléments neutres de l'involution. En effet, nous savons que le couple neutre d'une I_2^3 appartient à toute involution quadratique correspondant à tout élément quelconque; ce couple sera donc le couple d'éléments communs à deux involutions correspondant à deux points, par exemple x_4 et x_5.

6. On pourrait construire également une involution I_2^3 sur une droite en faisant usage de la propriété suivante : *les cubiques planes qui passent par sept points fixes marquent, sur une droite quelconque, des ternes de points formant une involution* I_2^3.

Il est un cas où les constructions sont particulièrement simples :

Soit à construire le point complétant un groupe défini par deux points x_2y_2 *dans une involution* I_2^3, *dont on connaît le couple neutre* n_1, n_2 *et un terne de points* x_1, y_1, z_1, dans la supposition que ces éléments sont situés sur une droite. Si le couple neutre est réel, menons par n_1 et n_2 deux droites arbitraires FAB et ECD (fig. I), et par x_2 une droite quelconque AD : les droites (z_1D), (y_1A) coupent respectivement FAB et ECD en F et en C. La droite (Cy_2) coupe FAB en B; la droite (x_1B) coupe CED en E; la droite EF coupe AC en G et la droite-support au point cherché z_2. En effet, les trois cubiques formées : 1° des trois droites (BE), (AC), (FD); 2° des trois droites (EF), (BC), (AD); 3° des deux droites (BF), (ED) et d'une droite quelconque passant par G, ont en commun sept points A, B, C, D, E, F, G, et par conséquent ces trois cubiques rencontrent le support en des ternes formant une I_2^3.

La position du point z_2 ne dépend pas du choix des droites FAB, ECD et AD.

En effet, si x et y sont les points d'intersection des droites AE et FC avec le support, le point z_2 est le point correspondant

Fig. I.

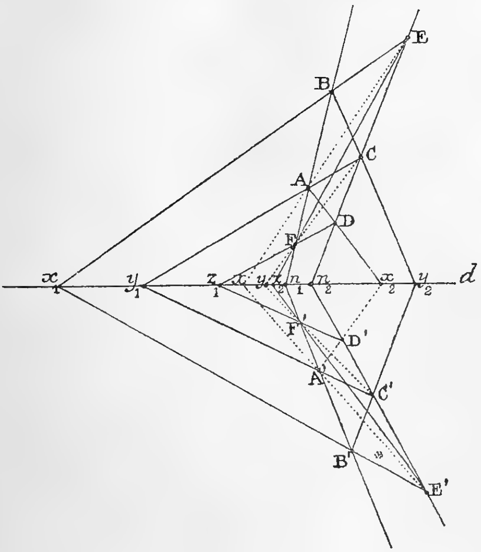
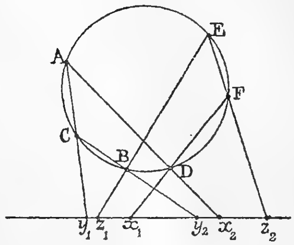


Fig. II.



de y_1 dans l'involution quadratique définie par les couples x, y ; n_1, n_2.

D'autre part, x et y sont des points fixes, puisque ce sont les points correspondants respectivement de y_2 et de x_2 dans les deux involutions quadratiques définies par les couples y_1, x_1 ; n_1, n_2 et z_1, y_1 ; n_1, n_2. Cela ressort immédiatement de l'examen de la figure I.

Si le couple de points neutres était formé de deux points imaginaires conjugués donnés, par exemple, par l'intersection imaginaire d'une courbe réelle C_2 avec le support, il suffirait de remplacer dans ce qui précède la conique décomposable formée des deux droites FB et CD par la conique C_2. La figure II indique suffisamment les constructions à effectuer.

7. Si nous prenons comme support d'une involution cubique une cubique gauche, les constructions deviennent excessivement simples. Il est, du reste, facile de faire correspondre uniformément les points d'une cubique gauche aux points d'une droite ou d'une conique, ou d'une courbe plane unicursale quelconque.

En effet, un faisceau de plans, dont l'axe est une bisécante de la cubique, projette uniformément tous les points de cette courbe sur une droite, et inversement.

S'il s'agit de transporter les points d'une cubique gauche sur une conique ou sur une courbe unicursale quelconque, on commencera par transporter ces points sur une droite quelconque et l'on projettera les points de cette droite sur la courbe unicursale, et inversement.

Nous avons vu dans la représentation des involutions quelconques que les plans d'une gerbe marquent sur une cubique gauche des séries de trois points formant une involution I_2^3.

En partant de là, nous pouvons construire facilement les ternes d'une involution cubique de seconde espèce, dont on connaît un nombre suffisant d'éléments déterminatifs.

Problèmes. — 1° *Construire une* I_2^3 *connaissant trois ternes d'éléments.*

Les éléments des ternes peuvent être donnés soit isolément, soit par leur plan, soit par une bisécante de la courbe et un point de cette courbe.

Les trois plans qui unissent les trois points des trois ternes se coupent en un point A; si l'on se donne deux points x, y d'un groupe, le plan (Axy) coupe la cubique en un troisième point z, qui complète le groupe déterminé par les deux points x et y.

Les points triples de l'involution sont marqués sur la cubique gauche par les points de contact des plans osculateurs issus du point A.

Pour construire les éléments neutres de l'involution, il suffit de remarquer que ces éléments forment le couple commun à toutes les involutions quadratiques correspondant à tous les points de la cubique; il s'agira donc de construire le couple commun à deux de ces involutions.

Prenons sur la courbe trois points quelconques M, M′ et M″; par la droite AM, menons deux plans quelconques qui rencontrent la cubique suivant deux bisécantes (XY), (X′Y′); soit M′P la transversale menée du point M′ à ces deux bisécantes; le plan (AM′P) coupe la cubique en deux points; la droite de jonction passera par le point A et sera la droite qui unit les éléments neutres; par conséquent, si M″P′ est la tranversale menée du point M″ aux deux bisécantes (XY) et (X′Y′), les deux plans (AM′P), (AM″P′) se couperont suivant la bisécante qui représente les éléments neutres de l'involution; cette bisécante passe nécessairement par le point A;

2° *Construire une* I_2^3, *connaissant le couple des éléments neutres et un terne de points.*

Soit *d* la bisécante qui unit les points neutres; le plan qui unit les points du terne donné coupe la droite *d* au point A; ce point caractérise, comme plus haut, l'involution;

3° *Construire le groupe commun à trois involutions définies par un nombre suffisant de conditions.*

Soient A, A′, A″ les centres des trois gerbes qui caractérisent les trois involutions : le plan (AA′A″) coupe la cubique en trois points, qui représentent le groupe commun aux trois involutions.

8. M. *Le Paige* (*) a appliqué la conception de l'involution cubique à la résolution de nombreuses questions intéressantes, entre autres à la construction des courbes et des surfaces cubiques.

Nous allons montrer, par un exemple que nous lui empruntons, en quoi consiste sa méthode.

Pour les courbes cubiques, le principe est celui dont nous

(*) *Mémoire sur les courbes du troisième ordre,* 2de partie [MÉMOIRES IN-4° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, t. XLV (1882), p. 40].

nous sommes déjà servi : *les cubiques qui passent par sept points coupent une transversale quelconque en des séries de trois points formant une* I_2^3.

Étant donnés neuf points indépendants entre eux, $A_1, A_2, \ldots, A_8, A_9$, nous pouvons construire les points d'intersection d'une droite quelconque Δ avec la cubique qui passe par ces neuf points.

En effet, les courbes cubiques du réseau qui a pour points de base les sept points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ coupent la transversale Δ en des ternes de points formant une I_2^3; nous pouvons déterminer facilement trois ternes de cette involution, car, dans le réseau en question, nous pouvons considérer les cubiques décomposables formées des éléments suivants : 1° la conique passant par les cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et la droite (A_6A_7); 2° la conique passant par A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 et la droite (A_5A_7); 3° la conique passant par A_1, A_2, A_3, A_5, A_6 et la droite (A_4A_7). Ces cubiques décomposables coupent la droite Δ en trois ternes de points qui suffisent pour définir l'involution I_2^3.

Si nous considérons de même les points d'intersection des cubiques des deux réseaux dont les points de base sont

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_8 \quad \text{et} \quad A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_9,$$

nous obtenons de la même façon deux nouvelles involutions $I_2'^3$, $I_2''^3$.

Si nous construisons sur la droite Δ le groupe commun aux trois involutions I_2^3, $I_2'^3$, $I_2''^3$, les points de ce groupe seront les points d'intersection de cette droite avec la cubique passant par les neuf points donnés.

II

1. Les diverses propriétés des involutions quelconques permettent d'énoncer les principales propriétés des courbes rationnelles des espaces à un nombre quelconque de dimensions.

Tous les espaces à n — 1 *dimensions d'un espace à* n *dimensions,* E_n, *rencontrent une courbe rationnelle quelconque de cet espace* C_m, *d'ordre* m, ($m \geqq n$), *en des séries de* m *points formant les groupes d'une involution d'ordre* m *et de rang* n.

En effet, la jonction de n points de la courbe C_m détermine un espace à $n - 1$ dimensions qui rencontre la courbe en m points, parmi lesquels figurent les n points donnés; de plus, cet espace à $n - 1$ dimensions ne dépend pas du choix des n points du groupe; les rôles des points d'un groupe sont donc interchangeables.

De la même façon : 1° *les espaces à* n — 1 *dimensions qui passent par un point fixe* A *de* E_n *marquent sur la courbe* C_m *des groupes de* m *points formant une involution d'ordre* m *et de rang* n — 1; 2° *les espaces à* n — 1 *dimensions qui passent par un point de la courbe* C_m *marquent sur celle-ci des groupes de* m — 1 *points, formant une involution d'ordre* m — 1 *et de rang* n — 1.

En ayant égard à ces considérations, nous pourrons énoncer la suite des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Par un point, situé en dehors d'une courbe rationnelle d'ordre* m, *d'un espace à* n *dimensions, on peut mener à cette courbe* n (m — n + 1) *espaces à* n — 1 *dimensions osculateurs.*

Autrement : *toute courbe rationnelle d'ordre* m *d'un espace à* n *dimensions est de la classe* n (m — n + 1); ou bien encore : *les espaces à* n — 1 *dimensions, osculateurs à une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, enveloppent une développable de la classe* n (m — n + 1).

Théorème II. — *Par un point situé sur une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener* n (m — n) *espaces à* n — 1 *dimensions osculateurs à cette courbe; les points de contact de ces espaces sont différents du point choisi.*

Théorème III. — *On peut mener à une courbe rationnelle d'ordre* m, *d'un espace à* n *dimensions,* (n + 1) (m — n) *espaces à* n — 1 *dimensions surosculateurs, c'est-à-dire ayant avec cette courbe un contact d'ordre* n.

Théorème IV. — *A une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener*

$$\rho!\binom{m-n}{\rho}\prod_{1}^{\rho}(r_i+1)$$

espaces à n — 1 *dimensions, contenant* ρ *espaces osculateurs à* r_i *dimensions, quand on a la condition*

$$\sum^{\rho} r_i = n.$$

Si les espaces osculateurs ont un même nombre de dimensions, les espaces à n — 1 *dimensions qui les unissent sont en nombre*

$$\binom{m-n}{\rho}(r+1)^{\rho}.$$

Théorème V. — *Les espaces à* n — 1 *dimensions qui ont, avec une courbe rationnelle* C_m *d'un espace à* n *dimensions,* ρ *contacts d'ordres* $r_1, r_2, \ldots, r_\rho$ *quand on a la condition*

$$\sum^{\rho} r_i = n - 1,$$

forment une développable de la classe

$$\rho!\binom{m-n}{\rho}\prod_{1}^{\rho}(r_i+1).$$

THÉORÈME VI. — *Par un point situé en dehors d'une courbe rationnelle d'ordre* m, *d'un espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n - 3)^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - 2$ *dimensions rencontrant la courbe en* $n - 1$ *points;* $n - 3$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+2}{2}$ *espaces semblables.*

THÉORÈME VII. — *Par un point situé en dehors d'une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n - 3 - 2p)^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - p - 2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n - p - 1$ *points;* $n - 3 - 2p$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+p+2}{p+2}$ *espaces semblables.*

THÉORÈME VIII. — *A une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n - 2)^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - 2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* n *points;* $n - 2$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+1}{2}$ *espaces semblables.*

THÉORÈME IX. — *A une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener une* $\{n - 2(p + 1)\}^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - p - 2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n - p$ *points :* $n - 2(p + 1)$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+p+1}{p+2}$ *espaces semblables.*

THÉORÈME X. — *Par un point situé sur une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n - 3)^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - 2$ *dimensions, rencontrant cette courbe en* n *points :* $n - 3$ *points quelconques figurent dans* $\binom{m-n+1}{2}$ *espaces semblables.*

THÉORÈME XI. — *Par un point situé sur une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n - 3 - 2p)^{\text{uple}}$ *infinité d'espaces à* $n - p - 2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n - p$ *points :* $n - 3 - 2p$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+p+1}{p+2}$ *espaces semblables.*

2. Les théorèmes suivants reposent sur cette remarque : *Tous les espaces à* n — 1 *dimensions d'un espace à* n *dimensions, qui passent par un espace à* k *dimensions, coupent une courbe rationnelle d'ordre* m *en des séries de* m *points, formant les groupes d'une involution d'ordre* m *et de rang* n — k — 1; *si cet espace à* k *dimensions rencontre la courbe en* p *points, l'involution sera d'ordre* m — p *et de rang* n — k — 1.

Si nous nous en rapportons aux propriétés des involutions d'ordre m ou $m - p$ et de rang $n - k - 1$, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Par un espace à* k *dimensions situé en dehors d'une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions, on peut mener* (n — k)(m — n + k + 1) *espaces à* n — 1 *dimensions, qui ont avec la courbe un contact d'ordre* n — k — 1.

Autrement : *Les espaces à* n — 1 *dimensions qui ont avec une courbe rationnelle d'ordre* m *d'un espace à* n *dimensions un contact d'ordre* n — k — 1, *enveloppent un espace à* k + 1 *dimensions de la classe* (n — k)(m — n + k + 1).

THÉORÈME II. — *Par un espace à* k *dimensions rencontrant une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions en* p *points, on peut mener* (n — k)(m — n — p + k + 1) *espaces à* k — 1 *dimensions, qui ont avec la courbe un contact d'ordre* n — k — 1; *les points de contact sont différents des* p *points de la courbe situés sur l'espace à* k *dimensions.*

THÉORÈME III. — *Les espaces à* n — 1 *dimensions qui ont avec une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions* ρ *contacts d'ordres* $r_1, r_2, \ldots, r_\rho$, *quand on a la condition*

$$\sum^{\rho} r_i = n - k - 1,$$

enveloppent un espace à k + 1 *dimensions de classe*

$$\rho! \binom{m - n + k + 1}{\rho} \prod_1^{\rho} (r_i + 1).$$

Quand les ρ *contacts sont du même ordre* r, *la classe de l'espace enveloppé est* $\binom{m-n+k+1}{\rho}(r+1)^{\rho}$.

Théorème IV. — *Par un espace à* k *dimensions situé dans un espace à* n *dimensions, on peut mener à une courbe rationnelle d'ordre* m *de cet espace une* $(n-k-3)^{uple}$ *infinité d'espaces à* $n-2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n-1$ *points;* $n-k-3$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+k+2}{2}$ *espaces semblables.*

Théorème V. — *Par un espace à* k *dimensions situé dans un espace à* n *dimensions, on peut mener une* $(n-k-3-2q)^{uple}$ *infinité d'espaces à* $n-q-1$ *dimensions, rencontrant une courbe rationnelle d'ordre* m *de cet espace en* $n-p-1$ *points :* $n-k-3-2q$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n+k+p+2}{p+2}$ *espaces semblables.*

Théorème VI. — *Par un espace à* k *dimensions rencontrant une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions en* p *points, on peut mener une* $(n-k-3)^{uple}$ *infinité d'espaces à* $n-2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n+p-1$ *points;* $n-k-3$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m-n-p+k+2}{2}$ *espaces semblables.*

Théorème VII. — *Par un espace à* k *dimensions rencontrant une courbe rationnelle d'ordre* m *de l'espace à* n *dimensions en* p *points, on peut mener une* $(n-k-2q-3)^{uple}$ *infinité d'espaces à* $n-q-2$ *dimensions, rencontrant la courbe en* $n+p-q-1$ *points :* $n-k-2q-3$ *points quelconques de la courbe figurent dans* $\binom{m+k+q-n-p-2}{q+2}$ *espaces semblables.*

3. *Cas particuliers* (*) : 1° $n=2$.

Théorème I. — *Toute courbe rationnelle d'ordre* m *située dans le plan, est de classe* $2(m-1)$.

(*) Voir le Mémoire de M. *Em. Weyr,* rappelé ci-dessus (p. 58).

THÉORÈME II. — *Par un point situé sur une courbe rationnelle d'ordre* m *du plan, on peut mener à cette courbe, outre la tangente en ce point,* 2 (m — 2) *autres tangentes.*

THÉORÈME III. — *Toute courbe rationnelle d'ordre* m *du plan possède* 3 (m — 2) *tangentes d'inflexion.*

THÉORÈME IV. — *Toute courbe rationnelle plane d'ordre* m *possède* 2 (m — 2) (m — 3) *tangentes doubles.*

THÉORÈME V. — *Toute courbe plane rationnelle d'ordre* m *possède* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *points doubles.*

Les points doubles d'une courbe rationnelle d'ordre m correspondent aux couples neutres de l'involution d'ordre m et du second rang, marqués sur la courbe par toutes les droites du plan.

4. 2° $n = 3$; dans ce cas, nous avons à considérer les courbes rationnelles de l'espace ordinaire.

THÉORÈME I. — *Toute courbe gauche rationnelle d'ordre* m *est de la classe* 3 (m — 2).

Autrement : *Les plans osculateurs d'une telle courbe forment une développable de la classe* 3 (m — 2).

THÉORÈME II. — *Par un point d'une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, *on peut mener à cette courbe, outre le plan osculateur en ce point,* 3 (m — 3) *autres plans osculateurs.*

THÉORÈME III. — *On peut mener à une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, 4 (m — 3) *plans surosculateurs.*

THÉORÈME IV. — *On peut mener à une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, $\frac{4}{3}$ (m — 3) (m — 4) (m — 5) *plans tritangents.*

THÉORÈME V. — *A toute courbe gauche rationnelle d'ordre* m, *on peut mener* $6(m-3)(m-4)$ *plans à la fois tangents et osculateurs.*

Théorème VI. — *Les plans tangents à une courbe gauche rationnelle d'ordre* m *enveloppent une surface de la classe* $2(m-1)$.

Théorème VII. — *Par un point situé en dehors d'une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, *on peut mener à cette courbe* $\binom{m-1}{2}$ *bisécantes.*

D'autre part, un plan quelconque rencontre une telle courbe en m points, qui peuvent s'associer par couples de $\binom{m}{2}$ manières, de façon à former $\binom{m}{2}$ bisécantes; donc :

Théorème VIII. — *Les bisécantes d'une courbe rationnelle d'ordre* m *forment une congruence d'ordre* $\binom{m-1}{2}$ *et de classe* $\binom{m}{2}$.

La courbe est le lieu des points singuliers de cette congruence, puisque par chacun de ses points il passe une infinité de bisécantes.

Théorème IX. — *Par un point situé sur une courbe rationnelle d'ordre* m, *on peut mener* $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$ *trisécantes de cette courbe.*

Les trisécantes d'une courbe gauche rationnelle d'ordre m sont donc en nombre simplement infini; elles forment une surface réglée (*).

M. *Weyr* a démontré que cette surface est de l'ordre $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3}$, ou, ce qui revient au même, qu'il existe $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3}$ droites trisécantes de la courbe qui rencontrent une droite quelconque de l'espace.

(*) L'étude des trisécantes d'une courbe gauche joue un rôle très important dans la théorie de la congruence formée par les bisécantes de cette courbe; nous espérons montrer cette importance dans un travail subséquent.

III

Courbes et surfaces d'involution.

1. Supposons que les groupes de n éléments d'une involution I_1^n soient représentés par des groupes de n points d'une courbe plane rationnelle d'ordre m, C_m; si nous unissons deux à deux par des droites les points des groupes, nous obtenons un ensemble simplement infini de droites, qui enveloppent donc une courbe appelée *courbe d'involution.*

Soit A, un point quelconque du plan : tous les rayons issus de ce point marquent sur la courbe C_m les groupes d'une involution d'ordre m et du premier rang, I_1^m. Cette involution I_1^m a, en commun avec l'involution I_1^n, des couples communs en nombre $(m - 1)(n - 1)$; ces couples correspondent aux tangentes de la courbe d'involution qui passent par le point A; nous obtenons le théorème suivant :

La courbe d'involution d'une I_1^n, *représentée sur une courbe rationnelle plane d'ordre* m, *est de la classe* $(m - 1)(n - 1)$.

En particulier, si la courbe-support est une conique, la courbe d'involution est de la classe $(n - 1)$.

Si nous remarquons que deux groupes de n éléments d'une involution I_1^n suffisent pour définir cette involution, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Les côtés de deux polygones complets de n *sommets inscrits à une conique sont tangents à une courbe de classe* n — 1, *et il existe une infinité d'autres polygones complets de* n *sommets circonscrits à cette courbe et inscrits à la conique.*

M. *Weyr* (*) a démontré le théorème réciproque : *Si, à un polygone complet de* n *sommets inscrits à une conique, on inscrit une courbe de classe* n — 1, *il existe une infinité de polygones complets de* n *sommets circonscrits à cette courbe et inscrits à la conique.*

(*) *Ueber Involutionen höherer Grade* (JOURNAL DE CRELLE, t. LXXII).

Les groupes de n sommets forment une involution I_1^n.

La courbe d'involution d'une I_1^n, représentée sur une courbe rationnelle C_m ($m > 2$), possède certaines particularités.

En effet, les droites du plan coupent la courbe C_m en des groupes de m points formant une I_2^m; les deux involutions I_1^n et I_2^m ont des termes communs en nombre $\binom{n-1}{2}(m-2)$; à chacun de ces termes il correspond des tangentes triples de la courbe d'involution; donc : *la courbe d'involution d'une* I_1^n, *représentée sur une courbe plane rationnelle d'ordre* m, *possède* $\binom{n-1}{2}(m-2)$ *tangentes triples.*

2. Supposons que les groupes d'une I_1^n soient représentés par des groupes de n points d'une courbe gauche rationnelle C_m d'ordre m; en joignant deux à deux par des droites les points des divers groupes, nous obtenons une infinité de droites dont le lieu est une surface réglée appelée *surface d'involution* de I_1^n.

Les plans d'un faisceau dont l'axe d est tout à fait quelconque marquent sur la courbe C_m des groupes de m points formant une involution I_1^m : les deux involutions I_1^n et I_1^m ont en commun $(n-1)(m-1)$ couples d'éléments; les droites correspondant à ces couples sont les droites de la surface d'involution qui s'appuient sur d.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La surface réglée d'involution d'une I_1^n *représentée sur une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, *est de l'ordre* $(m-1)(n-1)$.

Si A est un point quelconque de C_m, il lui correspond, dans l'involution I_1^n, $n-1$ points qui, unis à A, donnent $n-1$ génératrices de la surface d'involution; par conséquent, la courbe C_m est une courbe $(n-1)^{\text{uple}}$ de la surface d'involution.

D'autre part, tous les plans de l'espace marquent sur la courbe C_m les groupes d'une involution I_3^m; les deux involutions I_1^n, I_3^m ont en commun $\binom{n-1}{3}\binom{m-3}{1}$ quaternes; nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant : *La surface réglée d'involution d'une* I_1^n *représentée sur une courbe gauche rationnelle d'ordre* m, *contient* $(m-3)\binom{n-1}{3}$ *quadrangles complets plans inscrits à cette courbe.*

Ce théorème est dû à M. *Weyr.*

3. Si nous joignons trois à trois les points d'une I_1^n représentée sur une courbe gauche C_m, nous obtenons une infinité de plans qui forment une développable, appelée *développable d'involution* de I_1^n.

Les plans d'une gerbe dont le centre A est quelconque dans l'espace, marquent sur la courbe C_m les groupes d'une involution I_2^m.

Les deux involutions I_1^n et I_2^m ont en commun $\binom{n-1}{2}(m-2)$ ternes; ces ternes correspondent aux plans tangents de la développable qui passent par le point A; cette développable est donc de la classe $(m-2)\binom{n-1}{2}$.

Les plans de l'espace marquent sur la courbe C_m les groupes d'une I_3^m qui a en commun avec I_1^n, $(m-3)\binom{n-1}{3}$ quaternes d'éléments; par conséquent, la développable d'involution d'une I_1^n, représentée sur une courbe gauche rationnelle d'ordre m, possède $(m-3)\binom{n-1}{3}$ plans tangents quadruples.

En particulier, si $m=3$, et si nous remarquons qu'une I_1^n est déterminée par deux de ses groupes, nous arrivons au théorème suivant :

Les faces de deux polyèdres complets de n *sommets inscrits à une cubique gauche, sont circonscrites à une développable de classe* $\binom{n-1}{2}$, *et il existe une infinité d'autres polyèdres de* n *sommets inscrits à cette cubique gauche et circonscrits à la développable.*

4. Supposons actuellement que sur la courbe gauche C_m se trouvent représentés les groupes d'une involution I_2^n : les points des groupes, joints trois à trois, donnent lieu à une double infinité de plans, qui enveloppent une surface appelée *surface d'involution* de I_2^n.

On démontrerait facilement, par les mêmes procédés que précédemment, que cette surface d'involution est de la classe $\binom{m-1}{2}(n-2)$.

L'involution I_2^n possède $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ couples d'éléments neutres; les droites qui unissent les points de ces couples sont des génératrices rectilignes de la surface d'involution.

Tous les plans de l'espace marquent sur la courbe C_m les groupes d'une involution I_5^m, qui a en commun avec I_2^n, $\binom{m-3}{2}\binom{n-2}{3}$ quinternes; par conséquent, la surface d'involution d'une I_2^n, placée sur une courbe rationnelle gauche C_m, possède $\binom{m-3}{2}\binom{n-2}{3}$ plans décuples.

En particulier, si $m = 3$, et si nous remarquons qu'une I_2^n est déterminée par trois de ses groupes, nous arrivons au théorème suivant :

Les faces de trois polyèdres de n *sommets inscrits à une cubique gauche, sont tangentes à une même surface de classe* n — 1; *et il existe une double infinité de polyèdres jouissant des mêmes propriétés.*

Plus particulièrement encore, si nous supposons $n = 4$, nous retrouvons le théorème dû à M. *Cremona :*

Les faces de trois tétraèdres, inscrits à une cubique gauche, sont douze plans circonscrits à une même quadrique; il existe une double infinité de tétraèdres circonscrits à cette quadrique, et dont les sommets sont situés sur la cubique gauche.

5. Considérons, en général, dans l'espace à n dimensions, une courbe rationnelle d'ordre m, C_m, et supposons que sur cette courbe se trouvent représentés les groupes d'une involution I_k^p, $(n > k)$.

Si nous unissons par des espaces à $n - 1$ dimensions les groupes de n points de cette involution, nous obtenons une k^{uple} infinité d'espaces analogues : ces espaces enveloppent donc un espace à k dimensions.

Pour rechercher la classe de cet espace, remarquons que les espaces à $n - 1$ dimensions qui passent par un espace à $k - 1$ dimensions quelconque E_{k-1}, marquent sur la courbe C_m les groupes d'une involution d'ordre m et de rang $n - k$, I_{n-k}^m. Les deux involutions I_k^p et I_{n-k}^m ont des groupes de n éléments communs en nombre $\binom{p-k}{n-k}\binom{m-n+k}{k}$. Ce nombre est égal à la classe de l'espace en question, que nous appellerons *espace d'involution* de I_k^p représentée sur la courbe C_m.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

L'espace d'involution d'une I_k^p *représentée sur une courbe rationnelle d'ordre* m *d'un espace à* n *dimensions, est de la classe* $\binom{p-k}{n-k}\binom{m-n+k}{k}$.

L'involution I_k^p contient une $(k-2)^{\text{uple}}$, une $(k-4)^{\text{uple}}$, ..., une $(k-2q)^{uple}$ infinité de groupes neutres de k, $k-1$, ..., $\big(k-(q-1)\big)$ éléments de première espèce : les espaces à $k-1$, $k-2$, ..., $k-q-2$ dimensions qui unissent les points de ces groupes neutres sont autant d'espaces linéaires contenus dans l'espace d'involution.

Tous les espaces à $n-1$ dimensions rencontrent la courbe C_m en des groupes de m points formant une I_n^m; cette involution a, en commun avec I_k^p, des groupes de $k+n$ éléments communs, en nombre $\binom{m-n}{k}\binom{p-k}{n}$; donc l'espace d'involution de I_k^p possède $\binom{m-n}{k}\binom{p-k}{n}$ espaces enveloppants $\binom{n+k}{n}^{uples}$.

6. En particulier, supposons $m=n$, c'est-à-dire supposons que la courbe rationnelle choisie soit une courbe normale de l'espace à n dimensions; dans ce cas, l'espace d'involution d'une I_k^p sera de la classe $\binom{p-k}{n-k}$. Or, une involution I_k^p est déterminée par $k+1$ groupes de p éléments ; nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Les faces à n — 1 *dimensions de* k + 1 *polyèdres complets de* p *sommets inscrits à une courbe normale de l'espace à* n *dimensions, sont tangentes à un même espace à* k *dimensions de la classe* $\binom{p-k}{n-k}$, *et il existe une* k^{uple} *infinité d'autres polyèdres de* p *sommets circonscrits à cet espace et inscrits à la courbe normale.*

En particulier, si nous supposons $k=n-1$, $p=n+1$, nous obtenons la généralisation du théorème de M. *Cremona :*

Les faces à n — 1 *dimensions de* n *polyèdres de* n + 1 *sommets inscrits à une courbe normale d'un espace à* n *dimensions, sont tangentes à un même espace à* n — 1 *dimensions de la seconde classe; il existe une* $(n-1)^{\text{uple}}$ *infinité d'autres polyèdres de* n + 1 *sommets, inscrits à la courbe normale et circonscrits à l'espace à* n — 1 *dimensions.*

Si $k=n-1$, nous voyons que l'espace d'involution d'une I_{n-1}^m représentée sur une courbe normale de l'espace à n dimensions, est de la classe $(m - n + 1)$; or, une involution I_{n-1}^{m} est déterminée par n groupes de m éléments ; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les faces à n — 1 *dimensions de* n *polyèdres de* m *sommets inscrits à une courbe normale de l'espace à* n *dimensions, sont tangentes à un même espace à* n—1 *dimensions de la classe* (m—n+1).

7. *Remarque.* — Les espaces d'involution permettent de retrouver très simplement le nombre des groupes communs à $q+1$ involutions $\mathrm{I}_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q+1)$, quand le problème est possible, c'est-à-dire quand on a la condition

$$\frac{\sum^{q+1} k_i}{q} = \text{Entier} = n.$$

En effet, chacune des $q+1$ involutions $\mathrm{I}_{k_i}^{n_i}$ représentée sur la courbe normale de l'espace à n dimensions, aura pour espace d'involution un espace à k_i dimensions de la classe $\binom{n_i - k_i}{n - k_i}$; les $q+1$ espaces d'involution auront en commun des espaces à $n-1$ dimensions tangents, en nombre fini, puisque l'on a

$$\sum_{1}^{q+1} (n - k_i) = n;$$

le nombre des espaces communs est

$$\prod^{q+1} \binom{n_i - k_i}{n - k_i} = \prod^{q+1} \left(\begin{array}{c} n_i - k_i \\ \dfrac{\sum^{q+1} k_i}{q} - k_i \end{array} \right).$$

Ce nombre est bien celui que nous avons trouvé précédemment.

Cette méthode, quoique très simple, nous semble moins rigoureuse que la première; ensuite, pour l'appliquer, il faut que l'on ait déjà déterminé le nombre des groupes communs à deux involutions, puisque c'est en connaissance de ce nombre que nous sommes parvenu à déterminer la classe des espaces d'involution.

CHAPITRE IV.

I

Nous n'avons pu étudier d'une façon complète l'homographie entre les éléments de n figures de première espèce, faute d'avoir trouvé un procédé de représentation géométrique qui pût s'appliquer à tous les cas; nous sommes donc obligés, pour exposer les théorèmes fondamentaux de l'homographie, de nous servir de la représentation analytique.

1. Comme nous l'avons vu précédemment, une homographie H_{n-1}^n, entre n séries d'éléments de première espèce, se représente par une forme n-linéaire, non symétrique, égalée à zéro,

$$f \equiv a1_{x1} a2_{x2} \ldots an_{xn} \equiv b1_{x1} b2_{x2} \ldots bn_{xn} \equiv \cdots = 0;$$

nous représentons les séries d'éléments par la notation

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k, \quad \ldots, \quad i_n,$$

et nous convenons qu'un élément de la série i_k aura pour paramètres homogènes (xk_1, xk_2).

De ce que la forme f contient $2^n - 1$ coefficients indépendants entre eux, nous déduisons d'abord qu'une homographie H_{n-1}^n est déterminée par $2^n - 1$ groupes de n éléments homologues.

Si l'on effectue sur les variables (xk_1, xk_2) des transformations linéaires, la forme $f = 0$ se transforme en une autre forme n-linéaire $F = 0$; donc, par projections et sections, des séries homographiques d'éléments se transforment en d'autres séries d'éléments également homographiques; en d'autres termes, les figures homographiques sont des figures projectives.

A k *éléments donnés appartenant à* k *séries déterminées, il correspond, dans une* H_{n-1}^n, *des groupes de* n — k *éléments appar-*

tenant aux n — k *figures restantes et formant une homographie* H^{n-k}_{n-k-1}.

Ce théorème résulte de la définition même des séries homographiques.

2. Supposons que les n séries d'éléments d'une homographie H^n_{n-1} soient amenées, par projections et sections, à se trouver sur un même support; il peut arriver, en ce cas, que dans cette homographie projetée il existe des groupes composés de n éléments coïncidents. Pour obtenir les paramètres homogènes (x_1, x_2) de ces éléments coïncidents, il suffit de supposer, dans l'équation $f = 0$,

$$\frac{x1_1}{x1_2} = \frac{x2_1}{x2_2} = \cdots = \frac{xn_1}{xn_2} = \frac{x_1}{x_2};$$

nous obtenons ainsi une équation du degré n par rapport à $\frac{x_1}{x_2}$.

Donc, n *séries homographiques superposées possèdent* n *groupes composés d'éléments coïncidents.*

3. En général, dans n séries homographiques superposées ou non, à un groupe de $n - 1$ éléments donnés appartenant à $n - 1$ séries déterminées, par exemple aux séries $i_2, i_3, \ldots, i_n$, il ne correspond qu'un seul élément de la série i_1. Le paramètre de cet élément est déterminé par l'équation

$$\frac{x1_1}{x1_2} = -\frac{\dfrac{df}{dx1_2}}{\dfrac{df}{dx1_1}}.$$

S'il correspondait à ce groupe de $n - 1$ éléments deux éléments distincts de la série i_1, nécessairement on devrait avoir les conditions

$$\frac{df}{dx1_1} = 0, \quad \frac{df}{dx1_2} = 0.$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Si dans n *séries homographiques il correspond à* n — 1 *éléments de* n — 1 *séries déterminées deux éléments distincts de la série restante, il en correspond une infinité d'autres.*

Les groupes d'éléments de $n-1$ séries qui satisfont à cette condition seront appelés *groupes de* n — 1 *éléments neutres de première espèce.*

D'après le théorème précédent, si l'on transforme par projections et sections les éléments de n séries homographiques, les groupes neutres de la nouvelle homographie obtenue sont les transformés des groupes neutres de l'homographie primitive.

Les groupes neutres qui appartiennent aux séries $i_2, i_3, \ldots, i_n$, satisfont aux conditions

$$\frac{df}{dx1_1} = a1_1 a2_{x2} a3_{x3} \ldots an_{xn} = 0,$$

$$\frac{df}{dx1_2} = a1_2 a2_{x2} a3_{x3} \ldots an_{xn} = 0.$$

Chacune de ces équations définit une homographie H^{n-1}_{n-2}; l'ensemble des deux définit donc une homographie H^{n-1}_{n-3}.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

Les groupes de n — 1 *éléments neutres de première espèce d'une homographie d'ordre* n *et de rang* n — 1, *appartenant à* n — 1 *séries déterminées, forment une homographie d'ordre* n — 1 *et de rang* n — 3 (*).

4. Si nous considérons les n groupes de $n-1$ séries formés à l'aide des n séries homographiques, nous obtenons n homographies H^{n-1}_{n-3} dont tous les groupes sont les groupes de $n-1$ éléments neutres de première espèce de l'homographie proposée; les équations de ces n homographies sont

$$\frac{df}{dxk_1} = a1_{x1} a2_{x2} \ldots \overline{ak-1}_{xk-1} ak_1 \overline{ak+1}_{xk+1} \ldots an_{xn} = 0,$$

$$\frac{df}{dxk_2} = a1_{x1} a2_{x2} \ldots \overline{ak-1}_{xk-1} ak_2 \overline{ak+1}_{xk+1} \ldots an_{xn} = 0,$$

k prenant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

(*) Voir le Mémoire de M. *Le Paige*, cité p. 43.

Les groupes de $n - 1$ éléments neutres de l'homographie H^n_{n-1} sont donc définis par $n - 3$ de leurs éléments; les relations qui lient $(n-2)$ à $(n-2)$, les éléments de ces groupes, ne sont pas indépendantes entre elles.

Pour le prouver, éliminons, par exemple, entre les équations précédentes, la variable (xi_1, xi_2); nous obtenons la forme

$$f_{ik} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dxi_1dxk_1} & \dfrac{d^2f}{dxi_1dxk_2} \\ \dfrac{d^2f}{dxi_2dxk_1} & \dfrac{d^2f}{dxi_2dxk_2} \end{vmatrix} = 0;$$

pour ne pas compliquer notre raisonnement, nous n'écrirons pas l'expression symbolique de f_{ik}; cette expression peut se trouver, du reste, très facilement.

Si nous donnons à i et à k toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, nous obtenons $\binom{n}{2}$ fonctions analogues à f_{ik}, qui, égalées à zéro, représentent la liaison entre $n - 2$ éléments d'un groupe de $n - 1$ éléments neutres de première espèce.

De ce qui précède, nous déduisons que *les groupes de* $\mathrm{n} - 2$ *éléments appartenant aux séries* $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots, \mathrm{i}_{i-1}, \mathrm{i}_{i+1}, \ldots, \mathrm{i}_{k-1}, \mathrm{i}_{k+1}, \ldots, \mathrm{i}_n$, *qui, étant combinés à certains éléments de la série* i_i *ou de la série* i_k, *donnent lieu à un élément indéterminé de la série* i_k *ou de la série* i_i, *satisfont à la même relation*

$$f_{ik} = 0.$$

5. A $n - 2$ éléments appartenant à $n - 2$ séries déterminées, il correspond dans l'homographie H^n_{n-1} des couples d'éléments des séries restantes, formant une homographie quadratique dont l'équation est

$$xi_1xk_1 \frac{d^2f}{dxi_1dxk_1} + xi_1xk_2 \frac{d^2f}{dxi_1dxk_2} + xi_2xk_1 \frac{d^2f}{dxi_2dxk_1} + xi_2xk_2 \frac{d^2f}{dxi_2dxk_2} = 0.$$

Il peut arriver que, par un choix convenable des $n-2$ éléments, cette homographie quadratique soit indéterminée; dans ce cas, les paramètres des $n-2$ éléments satisfont aux conditions

$$\frac{d^2f}{dxi_1dxk_1}=0, \quad \frac{d^2f}{dxi_1dxk_2}=0, \quad \frac{d^2f}{dxi_2dxk_1}=0, \quad \frac{d^2f}{dxi_2dxk_2}=0.$$

Chacune de ces équations représente une homographie d'ordre $n-2$ et de rang $n-3$; l'ensemble de ces équations représente donc une homographie d'ordre $n-2$ et de rang $n-6$.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

Les groupes de n — 2 *éléments appartenant à* n — 2 *séries déterminées d'une homographie* $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}-1}$, *qui laissent indéterminés les éléments correspondants des séries restantes, forment une homographie* $\mathrm{H}^{\mathrm{n}-2}_{\mathrm{n}-6}$.

Ces groupes de $n-2$ éléments sont appelés groupes de $n-2$ éléments neutres. Les $\binom{n}{2}$ homographies H^{n-2}_{n-6} que l'on peut former de cette façon ne sont pas indépendantes entre elles; nous verrons plus loin, par un exemple, quelle est leur dépendance.

6. Plus généralement, à $n-k$ éléments appartenant à $n-k$ séries déterminées, il correspond des groupes de k éléments des séries restantes et formant une homographie H^{k}_{k-1}. Il peut arriver que cette homographie soit indéterminée; dans ce cas, les paramètres des $n-k$ éléments qui lui correspondent satisfont à 2^k fonctions $(n-k)$-linéaires égalées à zéro; chacune de ces équations représente une homographie H^{n-k}_{n-k-1}; leur ensemble représente une homographie $\mathrm{H}^{n-k}_{n-k-2^k}$.

Les groupes de $n-k$ éléments qui jouissent de cette propriété sont les groupes neutres de $n-k$ éléments; si donc nous avons $n \geq k+2^k$, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Les groupes de n — k *éléments neutres d'une homographie* $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}-1}$, *appartenant à* n — k *séries déterminées, forment une homographie* $\mathrm{H}^{\mathrm{n}-\mathrm{k}}_{\mathrm{n}-\mathrm{k}-2^{\mathrm{k}}}$.

7. Soient n homographies d'ordre n et de rang $n-1$, ${}^{(i)}H^n_{n-1}$, i prenant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$; supposons que les supports des mêmes séries de ces homographies coïncident.

Prenons sur le support de la série i_m, par exemple, $n-1$ éléments

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{i-1}, \quad A_{i+1}, \quad \ldots, \quad A_n;$$

à chacun de ces éléments, il correspond respectivement dans les $n-1$ homographies

$${}^{(1)}H^n_{n-1}, \quad {}^{(2)}H^n_{n-1}, \quad \ldots, \quad {}^{(i-1)}H^n_{n-1}, \quad {}^{(i+1)}H^n_{n-1}, \quad \ldots, \quad {}^{(n)}H^n_{n-1},$$

des groupes de $n-1$ éléments appartenant aux $n-1$ séries restantes et formant $n-1$ homographies d'ordre $n-1$ et de rang $n-2$:

$${}^{(1)}H^{n-1}_{n-2}, \quad {}^{(2)}H^{n-1}_{n-2}, \quad \ldots, \quad {}^{(i-1)}H^{n-1}_{n-2}, \quad {}^{(i+1)}H^{n-1}_{n-2}, \quad \ldots, \quad {}^{(n)}H^{n-1}_{n-2}.$$

Ces homographies ont les éléments des mêmes séries situés sur les mêmes supports; elles ont en commun des groupes de $n-1$ éléments en nombre fini, N_{n-1}. A chacun de ces groupes communs de $n-1$ éléments, il correspond dans l'homographie ${}^{(i)}H^n_{n-1}$ un seul élément A_i : donc, aux éléments

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{i-1}, \quad A_{i+1}, \quad \ldots, \quad A_n,$$

du support de la série i_m, il correspond sur ce support N_{n-1} éléments A_i. Puisque le rôle d'un quelconque des éléments A_1, $A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$, est le même par rapport aux $n-1$ autres, quel que soit cet élément, nous aurons entre ces éléments une correspondance

$$(N_{n-1}, \quad N_{n-1}, \quad \ldots, \quad N_{n-1}).$$

Le nombre des coïncidences de cette correspondance est précisément le nombre des groupes de n éléments communs aux n homographies ${}^{(i)}H^n_{n-1}$; d'après l'extension du principe de *Chasles* (II, II, 4), il existe $N_{n-1} \times n$ coïncidences; nous aurons donc

$$N_n = nN_{n-1}.$$

(Nous représentons par la notation N_k le nombre des groupes de k éléments communs à k homographies superposées d'ordre k et de rang $k-1$.) Nous aurons de même :

$$N_{n-1} = (n-1)\,N_{n-2},$$
$$N_{n-2} = (n-2)\,N_{n-3},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$N_3 = 3N_2.$$

Or, N_2 est le nombre des couples communs à deux homographies quadratiques; nous avons vu que ce nombre est égal à 2 : de là nous déduisons facilement

$$N_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = n!$$

Donc, n *homographies d'ordre* n *et de rang* n — 1 *superposées ont en commun des groupes de* n *éléments en nombre* n !.

II

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'indiquer un mode de représentation de l'homographie H^k_{k-1} :

1. Soient k involutions d'ordre n et de rang $n-1$, ${}^{(i)}I^n_{n-1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$, et une involution d'ordre $n-1$ et de rang $k-1$, I^{n-1}_{k-1}. Cette dernière involution possède une $(k-1)^{uple}$ infinité de groupes de $n-1$ éléments et à chacun de ces groupes, il correspond, dans chacune des involutions ${}^{(i)}I^n_{n-1}$, un élément X_i : nous aurons ainsi une $(k-1)^{uple}$ infinité de groupes de k éléments

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_k,$$

formant une homographie d'ordre k et de rang $k-1$. En effet, à $k-1$ éléments donnés appartenant, par exemple, aux $k-1$ premières séries, $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$, il correspond respectivement, dans les $k-1$ involutions

$${}^{(1)}I^n_{n-1}, \quad {}^{(2)}I^n_{n-1}, \quad \ldots, \quad {}^{(k-1)}I^n_{n-1},$$

des groupes de $n - 1$ éléments formant $k - 1$ involutions,

$$^{(1)}I^{n-1}_{n-2}, \quad ^{(2)}I^{n-1}_{n-2}, \quad \ldots, \quad ^{(k-1)}I^{n-1}_{n-2};$$

l'ensemble de ces $k - 1$ involutions forme une involution I^{n-1}_{n-k} qui a en commun avec I^{n-1}_{k-1} un seul groupe de $n - 1$ éléments; à ce groupe, il correspond dans l'involution $^{(k)}I^{n}_{n-1}$ un seul élément X_k.

Donc, à $k - 1$ éléments appartenant à $k - 1$ séries, il correspond un seul élément de la série restante; de plus, les rôles des éléments des divers groupes ne sont pas permutables; par conséquent, l'ensemble de ces groupes forme une homographie H^{k}_{k-1}. Nous pouvons, en faisant les conventions nécessaires, énoncer le théorème suivant :

La résultante de k *involutions d'ordre* n *et de rang* n — 1, *par rapport à une involution d'ordre* n — 1 *et de rang* k — 1, *est une homographie d'ordre* k *et de rang* k — 1.

Jusqu'à présent, nous ne sommes pas parvenu à démontrer, d'une manière satisfaisante, que, réciproquement, on peut déterminer le nombre n de façon qu'une homographie H^{k}_{k-1} puisse être considérée comme la résultante de k involutions I^{n}_{n-1}, par rapport à une I^{n-1}_{k-1}.

2. Remarquons, dans ce système de représentation, qu'un groupe de H^{k}_{k-1}, formé de k éléments coïncidents (dans le cas où les supports des diverses séries coïncident), joint au groupe de $n - 1$ éléments de l'involution I^{n-1}_{k-1}, qui lui a donné naissance, forme un groupe de n éléments communs aux k involutions $^{(i)}I^{n}_{n-1}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$. Or, les groupes communs aux k involutions $^{(i)}I^{n}_{n-1}$ forment une involution I^{n}_{k-1}; cette dernière involution a en commun avec I^{n-1}_{k-1}, k groupes de $n - 1$ éléments.

Nous retrouvons ainsi la propriété qu'une homographie H^{k}_{k-1} possède k groupes de k éléments coïncidents.

3. Nous pouvons démontrer de même le théorème suivant, que nous avons déjà établi :

Quand dans une homographie H^{k}_{k-1}, *il correspond à* k — 1 *éléments de* k — 1 *séries, deux éléments distincts de la série restante, il leur en correspond une infinité d'autres.*

Soient, en effet, $k-1$ éléments des $k-1$ premières séries,

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{k-1},$$

auxquels il correspond deux éléments distincts X_k et Y_k de la dernière série. A chacun de ces $k-1$ éléments, il correspond dans les $k-1$ premières involutions ${}^{(i)}I^n_{n-1} (i = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$ des séries de $n-1$ éléments formant $k-1$ involutions ${}^{(i)}I^{n-1}_{n-2}$; l'ensemble de ces dernières forme une involution I^{n-1}_{n-k}, qui a en commun avec I^{n-1}_{k-1}, en général, un seul groupe de $n-1$ éléments. Si donc il correspond aux $k-1$ éléments donnés deux éléments de la série restante, c'est qu'il peut se produire deux cas :

1° Ou bien, les $k-1$ éléments sont tels qu'il leur correspond non une I^{n-1}_{n-k} mais une I^{n-1}_{n-k+1} qui aura en commun avec I^{n-1}_{k-1} les groupes d'une I^{n-1}_1; à chacun des groupes de cette dernière involution il correspondra un élément X_k dans ${}^{(k)}I^n_{n-1}$.

2° Ou bien, les $k-1$ éléments sont tels qu'il leur correspond une I^{n-1}_{n-k}, et que le groupe de $n-1$ éléments communs à cette involution et à I^{n-1}_{k-1}, est un groupe neutre de ${}^{(k)}I^n_{n-k}$; dans ce cas encore, il correspond une infinité d'éléments de la dernière série.

4. Le théorème précédent et les remarques qui nous ont amenés à sa démonstration, vont nous permettre de déterminer les groupes de $k-1$ éléments neutres de l'homographie H^k_{k-1}.

En effet, les groupes de $n-1$ éléments neutres de l'involution ${}^{(k)}I^n_{n-1}$, par exemple, forment, comme nous l'avons vu, une ${}^{(k)}I^{n-1}_{n-3}$: cette involution a en commun avec I^{n-1}_{k-1}, les groupes d'une I^{n-1}_{k-3}.

Si nous prenons $k-2$ involutions ${}^{(i)}I^n_{n-1}$ parmi les $k-1$ involutions

$${}^{(1)}I^n_{n-1}, \quad {}^{(2)}I^n_{n-1}, \quad \ldots, \quad {}^{(k-1)}I^n_{n-1},$$

leur résultante par rapport à I^{n-1}_{k-3} sera une homographie d'ordre $k-2$ et de rang $k-3$. Comme nous pouvons choisir $k-2$ involutions, parmi $k-1$ involutions, de $k-1$ manières distinctes, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Les éléments de k — 1 *séries, appartenant à* k *séries homographiques, qui laissent indéterminé l'élément de la série restante, se répartissent par groupes de* k — 2 *éléments, de manière à former* k — 1 *homographies d'ordre* k — 2 *et de rang* k — 3.

Nous représenterons par la notation ${}^{(l)}_{j}H^{k-2}_{k-3}$, l'homographie formée par les groupes d'éléments des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{j-1}, \quad i_{j+1}, \quad \ldots, \quad i_{l-1}, \quad i_{l+1}, \quad \ldots, \quad ik,$$

qui, avec des éléments déterminés de la série i_j, donnent des éléments quelconques de la série i_l.

Il existe, d'après ce que nous venons de voir, $k(k-1)$ homographies semblables.

5. Soient donnés $k-3$ éléments des $k-3$ premières séries, par exemple

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{k-4}, \quad X_{k-3};$$

1° On peut déterminer un élément X_{k-2} et un élément X_{k-1} de la $k-2^{\text{ième}}$ et de la $k-1^{\text{ième}}$ série, de telle façon que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ série soit indéterminé dans H^k_{k-1} ; ces éléments sont les éléments complétant les groupes définis par les $k-3$ éléments donnés dans les deux homographies ${}^{(k)}_{k-2}H^{k-2}_{k-1}$ et ${}^{(3)}_{k-3}H^{k-2}_{k-3}$;

2° On peut déterminer un élément X'_{k-2} et un élément X'_k de la $k-2^{\text{ième}}$ et de la $k^{\text{ième}}$ série, de telle façon que l'élément correspondant de la $k-1^{\text{ième}}$ série soit indéterminé dans H^k_{k-1} ; ces éléments sont les éléments complétant les groupes définis par les $k-3$ éléments donnés dans les deux homographies ${}^{(k-1)}_{k-2}H^{k-2}_{k-3}$, ${}^{(k-1)}_{k}H^{k-2}_{k-3}$;

3° On peut déterminer un élément X''_{k-1} et un élément X''_k de la $k-1^{\text{ième}}$ et de la $k^{\text{ième}}$ série, de telle façon que l'élément correspondant de la $k-2^{\text{ième}}$ série soit indéterminé dans H^k_{k-1} ; ces éléments sont les éléments complétant les groupes définis par les $k-3$ éléments donnés dans les deux homographies ${}^{(k-2)}_{k-1}H^{k-2}_{k-3}$ et ${}^{(k-2)}_{k}H^{k-2}_{k-3}$.

Considérons le groupe formé des $n-1$ éléments

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \ldots, \quad X_{k-3}, \quad X'_{k-2}, \quad X''_{k-1};$$

il lui correspond dans l'homographie H^k_{k-1} un élément de la série restante qui est indéterminé.

En effet, à chacun de ces éléments il correspond respectivement, dans les $k - 1$ involutions

$$^{(1)}I^n_{n-1},\quad ^{(2)}I^n_{n-1},\quad \ldots,\quad ^{(k-1)}I^n_{n-1},$$

des groupes de $n - 1$ éléments, formant $k - 1$ involutions

$$^{(1)}I^{n-1}_{n-2},\quad ^{(2)}I^{n-1}_{n-2},\quad \ldots,\quad ^{(k-1)}I^{n-1}_{n-2};$$

l'ensemble de ces involutions forme une I^{n-1}_{n-k} qui a en commun avec I^{n-1}_{k-1} deux groupes de $n - 1$ éléments : ces groupes sont les groupes de $k - 1$ éléments neutres des deux involutions $^{(k-2)}I^n_{n-1}$, $^{(k-1)}I^n_{n-1}$ qui ont donné naissance aux deux groupes neutres de l'homographie H^k_{k-1},

$$X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_{k-3},\quad X'_{k-2},\quad X'_k;$$

$$X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_{k-3},\quad X''_{k-1},\quad X''_k.$$

Les deux involutions I^{n-1}_{n-k} et I^{n-1}_{k-1}, ayant deux groupes de $n - 1$ éléments communs, en ont une infinité d'autres qui forment une involution I^{n-1}_1 ; par conséquent, au groupe

$$X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_{k-3},\quad X'_{k-2},\quad X''_{k-1},$$

il correspond dans l'homographie H^k_{k-1} une infinité d'éléments de la série restante.

En résumé, on peut, à $k - 3$ éléments appartenant à $k - 3$ séries, associer deux groupes de deux éléments appartenant à deux autres séries, de façon qu'à ce groupe de $k - 1$ éléments, il corresponde dans l'homographie H^k_{k-1}, un élément indéterminé de la série restante : tous ces groupes neutres sont compris dans $k(k - 1)$ homographies d'ordre $k - 2$ et de rang $k - 3$.

L'étude des groupes neutres de $k - p$ éléments pourrait se faire en ayant égard à des considérations analogues : nous croyons pouvoir abandonner ce sujet pour étudier un cas particulier intéressant, qui nous conduira aux constructions géométriques de l'homographie cubique.

III

1. Trois involutions cubiques ont en commun, en général, un terne d'éléments ; soient

$$\lambda 1_1,\quad \lambda 1_2;\qquad \lambda 2_1,\quad \lambda 2_2;\qquad \lambda 3_1,\quad \lambda 3_2,$$

les paramètres homogènes de ces éléments ; les équations des trois involutions pourront s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\lambda i_2 x1_1 - \lambda i_1 x1_2)(\lambda i_2 x2_1 - \lambda i_1 x2_2)(\lambda i_2 x3_1 - \lambda i_1 x3_2) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i (\lambda i_2 x1_1 - \lambda i_1 x1_2)(\lambda i_2 x2_1 - \lambda i_1 x2_2)(\lambda i_2 x3_1 - \lambda i_1 x3_2) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_i (\lambda i_2 x1_1 - \lambda i_1 x1_2)(\lambda i_2 x2_1 - \lambda i_1 x2_2)(\lambda i_2 x3_1 - \lambda i_1 x3_2) = 0.$$

A deux éléments de paramètres homogènes

$$x1_1,\quad x1_2;\qquad x2_1,\quad x2_2,$$

il correspond, dans chacune de ces involutions, des éléments dont les paramètres respectifs satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(\lambda 1_2 y1_1 - \lambda 1_1 y1_2) & \alpha_2(\lambda 2_2 y1_1 - \lambda 2_1 y1_2) & \alpha_3(\lambda 3_2 y1_1 - \lambda 3_1 y1_2) \\ \beta_1(\lambda 1_2 y2_1 - \lambda 1_1 y2_2) & \beta_2(\lambda 2_2 y2_1 - \lambda 2_1 y2_2) & \beta_3(\lambda 3_2 y2_1 - \lambda 3_1 y2_2) \\ \gamma_1(\lambda 1_2 y3_1 - \lambda 1_1 y3_2) & \gamma_2(\lambda 2_2 y3_1 - \lambda 2_1 y3_2) & \gamma_3(\lambda 3_2 y3_1 - \lambda 3_1 y3_2) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} & y1_1 y2_1 y3_1(\alpha_1\lambda 1_2,\ \beta_2\lambda 2_2,\ \gamma_3\lambda 3_2) - y1_1 y2_1 y3_2(\alpha_1\lambda 1_2,\ \beta_2\lambda 2_2,\ \gamma_3\lambda 3_1) \\ & - y1_1 y2_2 y3_1(\alpha_1\lambda 1_2,\ \beta_2\lambda 2_1,\ \gamma_3\lambda 3_2) - y1_2 y2_1 y3_1(\alpha_1\lambda 1_1,\ \beta_2\lambda 2_2,\ \gamma_3\lambda 3_2) \\ & + y1_1 y2_1 y3_2(\alpha_1\lambda 1_2,\ \beta_2\lambda 2_1,\ \gamma_3\lambda 3_1) + y1_2 y2_1 y3_2(\alpha_1\lambda 1_1,\ \beta_2\lambda 2_2,\ \gamma_3\lambda 3_1) \\ & + y1_2 y2_2 y3_1(\alpha_1\lambda 1_1,\ \beta_2\lambda 2_1,\ \gamma_3\lambda 3_2) + y1_2 y2_2 y3_2(\alpha_1\lambda 1_1,\ \beta_2\lambda 2_1,\ \gamma_3\lambda 3_1) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation représente une homographie cubique; les éléments unis de cette homographie sont précisément les éléments communs aux trois involutions.

En effet, si l'on suppose, dans l'équation précédente,

$$\frac{y1_1}{y1_2} = \frac{y2_1}{y2_2} = \frac{y3_1}{y3_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

elle devient :

$$(\lambda 1_2 y_1 - \lambda 1_1 y_2)(\lambda 2_2 y_1 - \lambda 2_1 y_2)(\lambda 3_2 y_1 - \lambda 3_1 y_2)(\alpha_1, \beta_2, \gamma_3) = 0. \quad \text{(A)}$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

La résultante de trois involutions cubiques est une homographie cubique : les éléments unis de cette homographie sont les éléments du groupe commun aux trois involutions.

2. Démontrons maintenant le théorème réciproque :

Soit l'équation d'une homographie cubique la plus générale

$$\begin{aligned} f = {} & a_0 y1_1 y2_1 y3_1 + a_1 y1_1 y2_1 y3_2 + a_2 y1_1 y2_2 y3_1 \\ & + a_3 y1_2 y2_1 y3_1 + a_4 y1_1 y2_2 y3_2 + a_5 y1_2 y2_1 y3_2 \\ & + a_6 y1_2 y2_2 y3_1 + a_7 y1_2 y2_2 y3_2 = 0; \end{aligned}$$

nous allons prouver que cette équation peut, d'une double infinité de manières, se mettre sous la forme (A) [§ 1].

Soient

$$\lambda 1_1, \ \lambda 1_2; \quad \lambda 2_1, \ \lambda 2_2; \quad \lambda 3_1, \ \lambda 3_2$$

les paramètres homogènes des éléments unis de cette homographie; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2} + \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2} + \frac{\lambda 3_1}{\lambda 3_2} &= -\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_0}, \\ \frac{\lambda 1_1 \lambda 2_1}{\lambda 1_2 \lambda 2_2} + \frac{\lambda 1_1 \lambda 3_1}{\lambda 1_2 \lambda 3_2} + \frac{\lambda 2_1 \lambda 3_1}{\lambda 2_2 \lambda 3_2} &= +\frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_0}, \\ \frac{\lambda 1_1 \lambda 2_1 \lambda 3_1}{\lambda 1_2 \lambda 2_2 \lambda 3_2} &= -\frac{a_7}{a_0}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(C)}$$

Ces identités sont toujours satisfaites par les valeurs suivantes des coefficients a :

$$\frac{a_7}{a_0} = -\frac{\lambda 1_1 \lambda 2_1 \lambda 3_1}{\lambda 1_2 \lambda 2_2 \lambda 3_2},$$

$$\frac{a_6}{a_0} = \frac{(\alpha_1 \lambda 1_1,\ \beta_2 \lambda 2_1,\ \gamma_3 \lambda 3_1)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)},$$

$$\frac{a_5}{a_0} = \frac{(\alpha_1 \lambda 1_1,\ \beta_2 \lambda 2_2,\ \gamma_3 \lambda 3_1)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)},$$

$$\frac{a_4}{a_0} = \frac{(\alpha_1 \lambda 1_2,\ \beta_2 \lambda 2_1,\ \gamma_3 \lambda 3_1)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)},$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\frac{(\alpha_1 \lambda 1_1,\ \beta_2 \lambda 2_2,\ \gamma_3 \lambda 3_2)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)},$$

$$\frac{a_2}{a_0} = -\frac{(\alpha_1 \lambda 1_2,\ \beta_2 \lambda 2_1,\ \gamma_3 \lambda 3_2)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)},$$

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(\alpha_1 \lambda 1_2,\ \beta_2 \lambda 2_2,\ \gamma_3 \lambda 3_1)}{(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3)}.$$

Nous pouvons considérer ces relations comme étant des équations dont les inconnues sont

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3 \Delta},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3 \Delta},\quad \frac{\beta_1}{\beta_3 \Delta},\quad \frac{\beta_2}{\beta_3 \Delta},\quad \frac{\gamma_1}{\gamma_3 \Delta},\quad \frac{\gamma_2}{\gamma_3 \Delta},\qquad \Delta \equiv (\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_3).$$

Ces sept équations se réduisent à quatre, en vertu des identités (C); nous pouvons donc, à l'aide de ces quatre équations, déterminer quatre des quantités inconnues qui y entrent, en fonction des paramètres

$$\frac{\lambda 1_1}{\lambda 1_2},\quad \frac{\lambda 2_1}{\lambda 2_2},\quad \frac{\lambda 3_1}{\lambda 3_2}$$

et des inconnues restantes. Il est facile de s'assurer que cette détermination peut se faire en résolvant des équations linéaires; nous pourrons donc énoncer la propriété suivante :

Toute homographie cubique peut, d'une double infinité de *manières, être considérée comme étant la résultante de trois involutions cubiques.*

3. D'après cette propriété, la représentation de l'homographie cubique se ramène à celle de l'involution cubique; dans ce qui va suivre, nous ferons usage de cette propriété, démontrée précédemment :

Les plans d'une gerbe marquent sur une cubique gauche quelconque des ternes de points formant une involution cubique du second rang.

Nous en déduisons la représentation géométrique suivante de l'homographie cubique :

Soient trois points A, B, C *de l'espace et une cubique gauche quelconque* C_3 : *toute corde de cette courbe, jointe aux trois points* A, B, C, *donne lieu à trois plans qui marquent sur la cubique trois ponctuelles homographiques* x, y, z.

Ce théorème peut, du reste, se démontrer directement :

Soient donnés deux éléments X_1, Y_1, appartenant aux ponctuelles x et y; il n'existe qu'une seule bisécante de la cubique qui s'appuie à la fois sur les droites AX_1 et BY_1, et qui ne passe ni par X_1, ni par Y_1.

En effet, les bisécantes qui s'appuient sur (AX_1) marquent sur C_3 les couples d'une involution quadratique; il en est de même des bisécantes qui s'appuient sur (BY_1). Les deux involutions quadratiques ainsi obtenues ont un couple commun qui correspond à la bisécante cherchée, d. Nous avons vu, dans le premier chapitre, le moyen de construire linéairement cette bisécante.

La droite d, jointe au point C, donne un plan dont la troisième intersection Z_1 avec C_3, est le point de la ponctuelle z, complétant le terne déterminé par les points X_1 et Y_1.

Le plan des trois points A, B, C rencontre la cubique en trois points qui sont les éléments unis des trois ponctuelles homographiques.

Soient a, b, c les bisécantes de la cubique passant respectivement par les points A, B, C.

Les plans

$$(aB),\quad (aC);\qquad (bA),\quad (bC);\qquad (cA),\quad (cB)$$

coupent la cubique respectivement en des points

$$B_1,\quad C_1;\qquad A_2,\quad C_2;\qquad A_3,\quad B_3$$

qui sont les six éléments neutres des trois séries homographiques.

Ces six éléments neutres peuvent se disposer par couples, de manière à former six couples neutres.

Trois de ces couples sont visiblement

$$B_1,\quad C_1;\qquad A_2,\quad C_2;\qquad A_3,\quad B_3;$$

les trois autres sont

$$A_2,\quad B_1;\qquad A_3,\quad C_1;\qquad B_3,\quad C_2.$$

En effet, par exemple, les deux involutions quadratiques définies par les axes AA_2 et BB_1 ont en commun deux couples : ces couples sont représentés par les points d'appui des deux bisécantes a et b; ces deux involutions coïncident, c'est-à-dire il existe une infinité de bisécantes de la courbe qui s'appuient à la fois sur AA_2 et BB_1 ; par suite, aux éléments A_2 et B_1 de la série des x et de la série des y, il correspond une infinité d'éléments de la série des z.

Constructions de l'homographie cubique sur une cubique gauche.

4. Problème I. — *Construire une homographie dont on connaît sept ternes d'éléments, représentés par sept groupes de trois points d'une cubique gauche.*

Nous représenterons par I, II, III, IV, V, VI, VII ces sept ternes, et nous conviendrons que X_i, Y_i, Z_i sont les trois points de la cubique qui composent le $i^{\text{ième}}$ terne.

D'après ce que nous avons vu (I, III, 6), nous pouvons toujours déterminer un système de trois droites rencontrant la cubique et telles qu'en projetant les éléments des groupes I, II, III, nous obtenons trois nouveaux groupes, composés chacun de trois points coïncidents.

Les quatre groupes restants se projettent en quatre nouveaux groupes composés d'éléments distincts ; nous sommes ainsi ramenés à construire *une homographie dont on connaît les points triples et quatre ternes d'éléments* I, II, III, IV.

Soit d_1 une bisécante quelconque de C_3; les plans

$$(d_1X_1), \quad (d_1Y_1), \quad (d_1Z_1)$$

coupent le plan π, qui unit les points triples, en trois droites a, b, c passant par le point de rencontre de la bisécante d_1 et du plan π.

Prenons un point quelconque A_{23} de la droite a; soit d_2 une bisécante quelconque s'appuyant sur $(A_{23}X_2)$. Les plans

$$(d_2Y_2), \quad (d_2Z_2)$$

coupent respectivement b et c en des séries de points B_2 et C_2 qui sont visiblement en relation homographique; par suite, le lieu de la droite de jonction (B_2C_2), quand on considère toutes les bisécantes analogues à d_2, est une courbe de la seconde classe, σ_2, tangente aux deux droites b et c.

En remplaçant le groupe II, $(X_2Y_2Z_2)$, par le groupe III, $(X_3Y_3Z_3)$, nous obtenons de la même façon une deuxième courbe de la seconde classe, σ_2', tangente également aux deux droites b et c.

Les deux courbes σ_2 et σ_2' ont en commun, outre b et c, deux autres tangentes qui rencontrent b et c respectivement en B_{23}, C_{23} et B_{23}', C_{23}' : les deux systèmes de trois points

$$A_{23}, \quad B_{23}, \quad C_{23}; \qquad A_{23}, \quad B_{23}', \quad C_{23}',$$

caractérisent chacun l'homographie qui possède les éléments triples donnés et les trois groupes I, II, III.

En faisant varier le point A_{23} sur a, recherchons quel sera le lieu des droites telles que $(B_{23}C_{23})$.

Considérons dans le plan π un rayon quelconque passant par un point fixe O; cette droite rencontre b et c en B et C.

Au point B, pris comme point B_{23}, il correspond, ainsi que nous venons de le voir, deux points A_{23} et deux points C_{23}.

Il suit de là qu'entre les points C_{23} de c et les points tels que C, il existe une correspondance (2.2), qui possède quatre coïncidences : ces coïncidences correspondent aux quatre tangentes que l'on peut mener du point O à la courbe cherchée : cette courbe est donc de la quatrième classe; nous la désignerons par σ_4.

En remplaçant, dans tout ce qui précède, le groupe III par le groupe IV, nous obtenons de même une seconde courbe σ'_4

Chacune des tangentes communes à σ_4 et à σ'_4 rencontre b et c en B et C. Les deux droites (BY_2), (CZ_2) ont une bisécante commune d : le plan (dX_2) coupe la droite a en un point A. Les trois points A, B, C caractérisent complètement l'homographie satisfaisant aux conditions imposées.

Comme nous avons choisi la bisécante d_1 d'une façon arbitraire, nous voyons que le problème est possible d'une double infinité de manières.

Remarque. — Au lieu de prendre la bisécante d_1 tout à fait quelconque, nous pouvons supposer qu'elle passe par l'un des points de rencontre du plan π avec la courbe C_3; dans ce cas, il est facile de s'assurer que les deux courbes σ_4 et σ'_4 se réduisent à des courbes de la seconde classe.

5. Problème II. — *Construire une homographie cubique, connaissant un groupe neutre et cinq ternes de points.*

Il est bien évident, d'après ce que nous avons vu précédemment, qu'un couple neutre doit compter, dans les éléments déterminatifs d'une homographie, comme équivalent à deux ternes d'éléments.

D'autre part, si nous remarquons que les éléments neutres d'une homographie sont des éléments projectifs, nous pouvons ramener le problème proposé au problème suivant :

Construire une homographie cubique connaissant un couple neutre, par exemple **YZ**, *les points triples et deux ternes d'éléments* X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2.

Soient π, le plan qui unit les points triples et A, un point quelconque de ce plan.

Si d est la bisécante de la cubique qui passe par le point A, les plans

$$(dY), \quad (dZ)$$

coupent le plan π suivant deux rayons b et c passant par A.

Soit d_1, une bisécante quelconque s'appuyant sur AX_1; les plans

$$(d_1Y_1), \quad (d_1Z_1)$$

coupent respectivement b et c en B_1 et C_1.

Les points B_1 et C_1 sont reliés homographiquement; le point A se correspond; donc les jonctions (B_1C_1) sont les rayons d'un faisceau de centre O_1.

En remplaçant le groupe I, $(X_1Y_1Z_1)$, par le groupe II, $(X_2Y_2Z_2)$, nous obtenons de même un second faisceau de rayons de centre O_2.

La droite (O_1O_2) rencontre b et c en des points B et C qui, avec le point A, caractérisent complètement l'homographie.

Puisque la bisécante d est quelconque, le problème est possible d'une double infinité de manières; de plus, les constructions sont absolument linéaires.

6. Problème III. — *Construire une homographie cubique, dont on connaît deux couples d'éléments neutres et trois groupes de trois éléments.*

En faisant les mêmes remarques que pour les problèmes précédents, nous sommes ramenés à construire *une homographie cubique dont on connaît les points triples et deux couples neutres* **Y, Z**; X_1, Z_1.

Soit π, le plan qui unit les points triples; soit d, une bisécante quelconque de la cubique qui rencontre le plan π en A.

Les plans

$$(dY), \quad (dZ)$$

coupent le plan π en deux droites b et c, passant par le point A.

Le plan (bX_1) rencontre la cubique C_3 en des points situés sur une bisécante d_1 : cette droite d_1 rencontre b en B.

Le plan (d_1Z_1) coupe la droite c en C : les trois points A, B, C caractérisent l'homographie déterminée par les éléments donnés.

Comme pour les problèmes précédents, nous voyons que nous pouvons déterminer cette homographie d'une double infinité de manières.

7. Problème IV. — *Construire une homographie cubique dont on connaît trois couples neutres* Y, Z; X_1, Z_1; X_2, Y_2, *et un terne de points* $X_3Y_3Z_3$.

Nous pouvons obtenir une solution immédiate de ce problème en effectuant les constructions suivantes :

Soient C le point d'intersection du plan (X_2YZ_1) et de la droite (ZX_1), et B le point d'intersection du plan (X_1Y_2Z) et de la droite (YX_2).

Menons la bisécante commune aux deux droites (BY_3) et (CZ_3) (problème que nous savons résoudre linéairement); le plan (dX_3) rencontre la droite (X_1X_2) en un point A.

Les trois points A, B, C caractérisent l'homographie.

On pourrait démontrer que le problème que nous venons de résoudre, ainsi que les précédents, est possible d'une double infinité de manières; nous croyons pouvoir nous dispenser de le faire.

IV

Voici quelques applications des principes que nous venons d'établir :

1. *Soient* n *faisceaux de rayons que nous supposons reliés par une correspondance homographique : les rayons homologues se coupent en* $\binom{n}{2}$ *points; quand ces points coïncident, le lieu de leur point de coïncidence est une courbe d'ordre* n, *passant par les centres de* n *faisceaux.*

En effet, une transversale quelconque rencontre les groupes de rayons homologues de ces faisceaux suivant n ponctuelles homographiques superposées; il existe sur cette droite n groupes composés de n éléments coïncidents. Ces points coïncidents sont l'intersection du lieu en question avec la transversale.

Ce lieu passe nécessairement par les centres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des n faisceaux.

En effet, par exemple, aux rayons concourants

$$(A_1A_n), \quad (A_2A_n), \quad \ldots, \quad (A_{n-1}A_n)$$

des faisceaux dont les centres sont

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-2}, \quad A_{n-1},$$

il correspond un seul rayon du faisceau A_n, et ce rayon passe par le point de concours des $n - 1$ premiers rayons.

Réciproquement, étant donnés $\frac{n(n+3)}{2}$ *points d'une courbe d'ordre* n, *on peut construire cette courbe comme étant l'intersection des rayons concourants de* n *faisceaux homographiques.*

En effet, prenons n de ces points comme les centres de n faisceaux et joignons-les aux $\frac{n(n+3)}{2} - n = \frac{n(n+1)}{2}$ points restants; nous obtenons ainsi $\frac{n(n+1)}{2}$ groupes de n rayons.

Les rayons de ces groupes rencontrent une transversale quelconque en $\frac{(n+1)n}{2}$ groupes de n points; si nous construisons les groupes d'une homographie d'ordre n et de rang $n-1$ qui possède ces $\frac{n(n+1)}{2}$ groupes, et si nous unissons les points de ces groupes aux n centres choisis, nous obtiendrons n faisceaux de rayons homographiques; le lieu des intersections concourantes des rayons homologues est, d'après ce que nous venons de voir, une courbe d'ordre n qui passe par les $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés et qui, par conséquent, est la courbe demandée.

Comme une homographie d'ordre n et de rang $n-1$ est déterminée par 2^n-1 de ses groupes, nous voyons que par le procédé indiqué nous pouvons construire la courbe d'une $\left(2^n-1-\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\text{uple}}$ infinité de manières.

2. Nous pouvons envisager ce résultat d'une autre façon :

Soit C_n la courbe engendrée; à un rayon quelconque du faisceau dont le centre est A_1, par exemple, il correspond des groupes de $n-1$ rayons des autres faisceaux, formant $n-1$ faisceaux homographiques.

Le lieu des intersections concourantes des rayons homologues de ces $n-1$ faisceaux est une courbe du degré $n-1$; cela résulte de ce que nous venons de voir. Cette courbe rencontre le rayon du faisceau A_1 en $n-1$ points, qui appartiennent évidemment à la courbe C_n; à tous les rayons du faisceau A_1 il correspond toutes les courbes d'ordre $n-1$, appartenant également à un faisceau.

En effet, comme nous l'avons vu plus haut, les rayons des faisceaux dont les centres sont

$$A_2,\quad A_3,\quad \ldots,\quad A_{n-1},\quad A_n,$$

qui laissent indéterminés le rayon correspondant du faisceau dont le centre est A_1, forment les groupes communs à deux homographies d'ordre $n-1$ et de rang $n-2$ (c'est-à-dire une homographie d'ordre $n-1$ et de rang $n-3$).

A chacune de ces homographies il correspond une courbe d'ordre $n-1$, passant par les points

$$A_2,\quad A_3,\quad \ldots,\quad A_{n-1},\quad A_n.$$

Les deux courbes C_{n-1}, C'_{n-1} ainsi obtenues définissent un faisceau de courbes d'ordre $n-1$; d'après la définition même des éléments neutres, nous voyons qu'à un rayon quelconque du faisceau dont le centre est A_1 il correspond une courbe d'ordre $n-1$, passant par l'intersection des deux courbes C_{n-1} et C'_{n-1}.

Le faisceau (A_1) de rayons et le faisceau de courbes du degré $n-1$, (C_{n-1}, C'_{n-1}), se correspondent homographiquement : nous avons déjà démontré qu'à un faisceau du rayon (A_1) il correspond une courbe du faisceau (C_{n-1}, C'_{n-1}); réciproquement, à une courbe du faisceau (C_{n-1}, C'_{n-1}) il correspond un rayon du faisceau (A_1).

En effet, prenons un point quelconque M de cette courbe; aux rayons

$$(A_2M), \quad (A_3M), \quad \ldots, \quad (A_{n-1}M), \quad (A_nM),$$

des faisceaux

$$A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_{n-1}, \quad A_n,$$

il ne correspond qu'un seul rayon du faisceau A_1 : ce rayon correspond à la courbe; sans cela, à un rayon du faisceau A_1 il pourrait correspondre deux courbes du faisceau (C_{n-1}, C'_{n-1}).

Nous obtenons ainsi la propriété suivante :

Les droites d'un faisceau de rayons homographiques aux courbes d'ordre n — 1 *d'un faisceau, rencontrent leurs courbes homologues en* n — 1 *points dont le lieu est une courbe d'ordre* n, *passant par les points de base des deux faisceaux.*

3. M. *Le Paige* (*) a étudié spécialement le cas de $n=3$, pour lequel on obtient les théorèmes suivants :

Le lieu des intersections concourantes de trois faisceaux de rayons homographiques, est une courbe du troisième degré passant par les centres des trois faisceaux.

Toute courbe du troisième degré peut, d'une infinité de manières, être considérée comme le lieu des intersections concou-

(*) *Mémoire sur les courbes du troisième ordre,* 2[de] partie (Mémoires in-4° de l'Acad. roy. de Belgique, t. XLV).

rantes de trois faisceaux homographiques de rayons dont les centres sont situés sur la courbe.

Soient A, B, C les trois centres; il existe six rayons,

$$a_1,\quad a_2;\qquad b_1,\quad b_3;\qquad c_2,\quad c_3,$$

appartenant par couples aux trois faisceaux, et qui se groupent des six façons suivantes :

$$a_1,\ b_1;\quad a_1,\ c_3;\quad a_2,\ c_2;\quad a_2,\ b_3;\quad b_3,\ c_3;\quad b_1,\ c_2,$$

de manière à former les six couples neutres de rayons des trois faisceaux homographiques.

Les six points d'intersection A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 des rayons de ces couples appartiennent évidemment à la courbe; par suite, les deux triangles dont les côtés sont respectivement

$$a_1,\quad c_2,\quad b_3\qquad \text{et}\qquad a_2,\quad b_1,\quad c_3$$

se coupent en neuf points,

$$A,\quad B,\quad C,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\quad A_6,$$

situés sur la cubique. Ces deux triangles sont appelés *conjugués* à la courbe; comme les trois points A, B, C sont quelconques, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Par trois points d'une cubique plane, on peut toujours faire passer les côtés de deux triangles conjugués à cette courbe.

La cubique et un système de deux triangles conjugués à cette courbe sont trois courbes du troisième degré appartenant à un même faisceau; nous obtenons, en conséquence, la propriété suivante :

Une cubique plane et un système de deux triangles conjugués à cette courbe sont rencontrés par une transversale quelconque en trois ternes de points appartenant à une même involution cubique du premier rang.

4. La conception de l'homographie peut encore servir à la génération de certaines surfaces, ainsi qu'il suit :

Le lieu des intersections concourantes des plans homologues *appartenant à* n *faisceaux homographiques, est une surface d'ordre* n.

En effet, les plans homologues de n faisceaux homographiques rencontrent une transversale quelconque de l'espace suivant n ponctuelles homographiques superposées; il existe n groupes composés de n points homologues coïncidents; ces points sont l'intersection du lieu et de la transversale.

La surface engendrée passe par les axes

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

des n faisceaux homographiques.

En effet, soit A_1 un point quelconque de l'axe a_1; aux plans concourants

$$(a_2A_1), \quad (a_3A_1), \quad \ldots, \quad (a_{n-1}A_1), \quad (a_nA_1)$$

des $n - 1$ faisceaux dont les axes sont

$$a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

il correspond un seul plan du faisceau a_1, et ce plan passe par A_1.

Comme la surface engendrée contient les axes des faisceaux, on ne peut pas obtenir, par le procédé précédent, la surface la plus générale d'ordre n. En effet, à partir de $n = 4$, les surfaces algébriques générales ne contiennent pas de génératrices rectilignes.

Dans le cas de $n = 3$, on obtient la surface cubique générale; pour le démontrer, il suffira de prouver qu'une surface cubique peut être engendrée par l'intersection des plans homologues de trois faisceaux homographiques.

En effet, prenons trois génératrices a, b, c de la surface, qui ne se rencontrent pas, et sept points de cette surface.

Les plans qui unissent les trois droites aux sept points donnent lieu à un système de sept ternes de trois plans qui rencontrent une transversale en sept ternes de points : ces sept ternes de points suffisent pour déterminer sur la transversale trois ponctuelles homographiques. Si nous unissons les points de ces ponctuelles aux trois droites a, b, c, nous obtenons trois faisceaux homographiques de plans; le lieu de l'intersection des plans homologues est une surface du troisième degré qui passe par les trois droites a, b, c et les sept points : cette surface coïncide avec la surface donnée, puisque par trois droites et sept points on ne peut faire passer qu'une surface du troisième degré.

Dans les trois faisceaux homographiques qui engendrent la surface, il existe six plans,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2; \qquad \beta_1, \quad \beta_3; \qquad \gamma_2, \quad \gamma_3,$$

appartenant par couples aux trois faisceaux et se distribuant des six manières suivantes :

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_1, \gamma_2; \quad \alpha_2, \beta_3; \quad \alpha_2, \gamma_3; \quad \beta_1, \gamma_3; \quad \beta_3, \gamma_2,$$

de façon à former les six couples neutres des trois faisceaux homographiques. Les six droites d'intersection de ces couples sont visiblement six droites de la surface engendrée.

Les deux trièdres dont les faces sont

$$\alpha_1, \quad \beta_3, \quad \gamma_3; \qquad \alpha_2, \quad \beta_1, \quad \gamma_2,$$

sont deux trièdres dont les faces se coupent en neuf droites qui appartiennent à la surface : ces trièdres sont appelés *conjugués* à la surface cubique où ils sont inscrits (*).

Il existe d'autres trièdres *conjugués* à une surface cubique; mais nous ne continuerons pas plus loin cette étude, que nous avons abordée dans le seul but de montrer la fécondité des moyens de recherches basés sur les homographies supérieures.

5. Quant à la construction des surfaces cubiques, la seule difficulté consiste à établir géométriquement la correspondance

(*) Voir, à ce sujet, les *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne* de M. *Folie* (Mémoires in-4° de l'Acad. roy. de Belgique, t. XXXIX).

homographique entre les plans de trois faisceaux ; voici quelques procédés :

1° Supposons que l'on demande de *construire une surface cubique passant par trois droites données* a, b, c, *et par sept points* $A_1, A_2, \ldots, A_6, A_7$.

Traçons dans l'espace une cubique gauche quelconque qui ait pour bisécantes les droites *a*, *b*, *c*; les sept ternes de plans

$$(aA_i), \quad (bA_i), \quad (cA_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

coupent la cubique en sept ternes de points X_i, Y_i, Z_i.

Construisons, comme nous l'avons indiqué précédemment (IV, III, 4), les groupes de l'homographie qui est déterminée sur la cubique gauche par ces sept ternes de points, et joignons les points de ces groupes respectivement aux droites *a*, *b*, *c*; les plans homologues des trois faisceaux ainsi obtenus se coupent en des points dont le lieu est la surface cherchée.

2° *Les plans d'une gerbe coupent les faces d'un trièdre fixe en des groupes de trois droites qui, joints respectivement à trois points fixes, donnent lieu à trois faisceaux de plans.*

Le lieu des intersections des plans homologues est une surface cubique qui possède pour point double le sommet du trièdre fixe.

Ce procédé a été indiqué par M. *Salmon.*

3° *Les rayons d'une gerbe coupent les faces d'un trièdre fixe en des groupes de trois points; le lieu de l'intersection des plans qui unissent ces points à trois droites fixes est une surface cubique passant par le sommet du trièdre fixe et par les trois droites.*

Ce procédé de génération ne permet pas de construire une surface cubique astreinte à dix-neuf conditions; la raison en est que l'homographie cubique caractérisée par ce procédé n'est pas la plus générale (*).

4° *Les plans d'une gerbe coupent trois droites fixes de l'espace*

(*) Voir, à ce sujet, notre travail intitulé *Génération d'une surface du troisième ordre* (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 2e série, t. XIV).

en trois séries homographiques de points qui, joints à trois axes fixes, donnent lieu à trois faisceaux homographiques de plans : le lieu des intersections des plans homologues est une surface du troisième degré passant par les trois axes fixes.

L'homographie caractérisée de cette façon sur les droites fixes n'est pas la plus générale ; il s'ensuit que ce procédé de génération ne peut servir à construire une surface cubique astreinte à dix-neuf conditions.

5° Ce procédé de génération des surfaces cubiques peut être généralisé de diverses façons ; en voici un exemple :

Les plans qui enveloppent une surface de la classe n *marquent sur trois droites fixes des séries de trois points qui, projetés de trois axes fixes, donnent lieu à trois séries de plans.*

Le lieu de l'intersection des plans homologues est une surface d'ordre 3n.

En effet, une transversale quelconque rencontre les plans homologues des trois faisceaux suivant trois ponctuelles superposées : entre les éléments de ces ponctuelles, il existe une correspondance $(n \,.\, n \,.\, n)$; d'après l'extension du principe de Chasles, il existe $3n$ coïncidences, qui sont les intersections du lieu avec la transversale en question. Ce lieu contient évidemment les trois axes des faisceaux.

En particulier, si $n = 2$, la surface engendrée est du sixième degré ; plus particulièrement encore, si les trois droites fixes se rencontrent en un même point et si la surface génératrice du second degré est tangente aux faces du trièdre formé par ces droites, la surface du sixième ordre se décompose en une surface cubique, passant par les trois axes des faisceaux, et les trois faces du trièdre. Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème, dû à M. *Le Paige* (*) :

Si un tétraèdre se déplace de telle façon que trois de ses faces passent par trois axes fixes, tandis que la quatrième face enveloppe une surface de la seconde classe tangente aux faces d'un

(*) Voir, à ce sujet, par exemple, la seconde partie des *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* de M. *Le Paige*, pages 114 et suivantes.

trièdre fixe, et que les sommets du tétraèdre situés dans cette face parcourent les arêtes du trièdre, le quatrième sommet décrira une surface cubique.

Ce théorème permet réciproquement de construire une surface du troisième degré passant par trois droites et sept points donnés.

En effet, par l'un des sept points donnés, menons un trièdre quelconque; les plans qui unissent les six autres points aux trois droites, marquent sur les arêtes du trièdre choisi des groupes de trois points; construisons la surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre et aux six plans correspondant aux six groupes de trois points du trièdre fixe; achevons les constructions indiquées par le théorème précédent : nous aurons la surface cubique cherchée.

M. *Le Paige* a encore donné une autre construction de la surface cubique.

Voici, en quelques mots, en quoi elle consiste :

Les plans de l'espace marquent sur quatre droites fixes des séries de quatre points qui, projetés respectivement de quatre axes fixes, donnent quatre faisceaux homographiques de plans.

Le lieu des intersections concourantes des groupes de quatre plans homologues, est une surface du quatrième ordre.

Si les quatre axes de projection sont dans un plan, la surface engendrée se décompose en ce plan et en une surface cubique.

Cette génération de la surface cubique a conduit M. *Le Paige* à l'étude d'une configuration extrêmement intéressante (*).

(*) *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. VIII).

CHAPITRE V.

I

Dans ce dernier chapitre, nous allons étudier quelques propriétés générales des homographies d'ordre et de rang quelconques.

1. Par définition, une homographie d'ordre n et de rang k, H_k^n, est l'ensemble des groupes de n éléments, communs à $n - k$ homographies, d'ordre n et de rang $n - 1$, dont les supports des mêmes séries d'éléments sont superposés.

D'après cela, à k éléments appartenant à k séries déterminées il correspond, dans les $n - k$ homographies d'ordre n et de rang $n - 1$, des groupes de $n - k$ éléments formant $n - k$ homographies d'ordre $n - k$ et de rang $n - k - 1$; d'après ce que nous avons vu précédemment, ces $n - k$ homographies ont en commun $(n - k)!$ groupes communs de $n - k$ éléments (IV, I, 7).

Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Dans une homographie d'ordre n *et de rang* k, *à* k *éléments appartenant à* k *séries déterminées il correspond dans les séries restantes* (n — k)! *groupes de* n — k *éléments.*

2. A k' éléments ($k' < k$) du support de k' séries d'une H_k^n il correspond, dans les $n - k$ homographies d'ordre n et de rang $n - 1$ dont H_k^n est l'intersection, des groupes de $n - k'$ éléments des séries restantes, formant $n - k$ homographies d'ordre $n - k'$ et de rang $n - k' - 1$; les groupes communs à ces $n - k'$ homographies forment un homographie d'ordre $n - k'$ et de rang $k - k'$; donc : *à* k' *éléments* (k' < k) *appartenant* *à* k′ *séries d'une homographie d'ordre* n *et de rang* k, *il correspond dans les séries restantes des groupes de* n — k′ *éléments formant une homographie d'ordre* n — k′ *et de rang* k — k′.

3. En général, à k éléments appartenant, par exemple, aux séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k,$$

il correspond, comme nous venons de le voir, $(n - k)!$ groupes de $n - k$ éléments appartenant aux séries restantes

$$i_{k+1}, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_n.$$

Cependant il peut arriver que, par un choix convenable des k éléments, il corresponde une infinité de groupes de $n - k$ éléments.

Voici quand cela pourra se présenter :

Supposons que dans les $(n - k)!$ groupes qui correspondent aux k éléments des séries données, il se trouve deux groupes composés des mêmes éléments des $n - k - 1$ séries

$$i_{k+1}, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_{n-1},$$

tandis que l'élément de la série i_n est différent dans les deux groupes.

Dans ce cas, ce groupe de $n - k - 1$ éléments est un groupe neutre de chacune des homographies, d'ordre $n - k$ et de rang $n - k - 1$, qui correspondent aux k éléments donnés dans les homographies d'ordre n et de rang $n - 1$, dont l'homographie H_k^n est l'intersection.

Il s'ensuit qu'aux k éléments en question il correspondra une infinité de groupes, composés de $n - k - 1$ éléments fixes des séries $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1}$ et d'un élément quelconque de la série i_n.

Nous pourrons appeler ces groupes de k éléments, *groupes neutres des séries* $i_1, i_2, \ldots, i_k$, *par rapport à la série* i_n.

4. Il peut arriver que dans les $(n - k)!$ groupes de $n - k$ éléments qui correspondent à un choix convenable de k éléments appartenant aux séries i_1, i_2, ..., i_k, il s'en trouve quatre complètement indépendants entre eux et composés, par exemple, des mêmes éléments des $n - k - 2$ séries

$$i_{k+1}, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_{n-3}, \quad i_{n-2},$$

tandis que les éléments des séries i_{n-1} et i_n varient d'un groupe à l'autre.

Dans ce cas, le groupe des $n - k - 2$ éléments des séries

$$i_{k+1}, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_{n-3}, \quad i_{n-2},$$

est un groupe de $n - k - 2$ éléments neutres, commun aux $n - k$ homographies, d'ordre $n - k$ et de rang $n - k - 1$, qui correspondent aux k éléments des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k,$$

dans les $n - k$ homographies d'ordre n et de rang $n - 1$ qui définissent l'homographie H_k^n.

Il s'ensuit qu'aux k éléments en question il correspond des groupes de $n - k$ éléments, composés de $n - k - 2$ éléments fixes des séries

$$i_{k+1}, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_{n-2},$$

et de deux éléments indéterminés des séries i_{n-1} et i_n.

Nous appellerons ces groupes d'éléments, groupes neutres des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k,$$

par rapport aux séries i_{n-1} et i_n.

On pourrait étendre ces considérations à la notion des groupes neutres de k séries par rapport à p des séries restantes ($p \leqq n - k$).

5. A $k - 1$ éléments appartenant à $k - 1$ séries du support d'une homographie H_k^n, il correspond dans cette homographie des groupes de $n - k + 1$ éléments des séries restantes, qui forment une homographie d'ordre $n - k + 1$ et du premier rang, H_1^{n-k+1}.

Il peut arriver que, par un choix convenable des $k - 1$ éléments, cette homographie H_1^{n-k+1} ait des groupes composés de $n - k - i$ éléments fixes et de $i + 1$ éléments indéterminés.

Ces groupes de $k - 1$ éléments sont les groupes neutres de $k - 1$ séries, par rapport aux éléments de $i + 1$ des séries restantes.

De même, il y a lieu de considérer les groupes de $k - p$ éléments neutres de $k - p$ séries, par rapport aux éléments de i des séries restantes.

Jusqu'à présent, nous n'avons pu mener plus loin l'étude des groupes neutres d'une homographie : cette question exige la résolution de problèmes fort difficiles sur l'élimination.

II

Éléments multiples.

1. Supposons que les $k + 1$ supports de $k + 1$ séries, par exemple des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{k+1},$$

de n séries formant une H_k^n, coïncident; il peut arriver que, à k éléments coïncidents de k séries, par exemple des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{k-1}, \quad i_k,$$

il corresponde des groupes de $n - k$ éléments, tels qu'un de ces groupes contienne un élément X_{k+1} de la série i_{k+1}, qui soit précisément le point de coïncidence, $X_{1.2.3,\ldots,k}$, des k éléments déterminatifs.

Représentons par N_k^n le nombre de ces groupes.

A un élément $X_{1.2.3,\ldots,k}$ il correspond $(n - k)!$ groupes de $n - k$ éléments des séries restantes et, par suite, $(n - k)!$ éléments X_{k+1} de la série i_{k+1}.

A un élément X_{k+1} de la série i_{k+1} il correspond dans H_k^n des groupes de $n - 1$ éléments appartenant aux séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k, \quad i_{k+2}, \quad \ldots, \quad i_n,$$

et formant une homographie H_{k-1}^{n-1}; les supports des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k$$

de cette homographie coïncident; il existe un nombre N_{k-1}^{n-1} de groupes de cette homographie qui contiennent k éléments des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k,$$

coïncidents en un même élément $X_{1.2.3,\ldots,k}$.

Donc, à un élément X_{k+1} il correspond N_{k-1}^{n-1} éléments $X_{1.2.3,\ldots,k}$.

Ainsi, entre les éléments X_{k+1} et $X_{1.2.3,\ldots,k}$ il existe la correspondance

$$\left((n-k)!, \quad N_{k-1}^{n-1}\right).$$

Le nombre des coïncidences de cette correspondance est exactement égal au nombre N_k^n; par conséquent, on a :

$$N_k^n = (n-k)! + N_{k-1}^{n-1}.$$

Remplaçons dans cette formule de récurrence, successivement n et k par $n - 1, n - 2, \ldots, n - k + 1$, et $k - 1, k - 2, \ldots, 1$; nous aurons la suite de relations :

$$N_{k-1}^{n-1} = (n-k)! + N_{k-2}^{n-2},$$

$$N_{k-2}^{n-2} = (n-k)! + N_{k-3}^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_2^{n-k+2} = (n-k)! + N_1^{n-k+1},$$

$$N_1^{n-k+1} = (n-k)! + (n-k)!,$$

d'où nous déduisons

$$N_k^n = (n-k)!\,(k+1)\ (^*).$$

Si les supports des n séries coïncident, le nombre total des groupes composés de $k+1$ éléments coïncidents sera

$$(n-k)!\,(k+1)\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!}(n-k).$$

Éléments multiples associés.

2. Supposons que les supports des séries

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{r_1},\ i_{r_1+1},\ \ldots,\ i_{r_1+r_2},\ i_{r_1+r_2+1},\ i_{r_1+r_2+2},$$

d'une homographie H_k^n coïncident.

A r_1 éléments appartenant aux séries

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_{r_1},$$

il correspond dans l'homographie H_k^n des groupes de $n-r_1$ éléments, formant une homographie $H_{k-r_1}^{n-r_1}$.

Cette dernière homographie possède des groupes composés d'éléments coïncidents des séries

$$i_{r_1+2},\quad \ldots,\quad i_{r_1+r_2+1},\quad i_{r_1+r_2+2},$$

en nombre fini

$$(n-k)!\,(k-r_1+1) = (n-k)!\,(r_2+1)\ ;\quad (r_1+r_2=k).$$

La même propriété a encore lieu quand les r_1 éléments des séries

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_{r_1}$$

(*) Cette formule a été donnée par M. *Le Paige* (*loc. cit.*, p. 58).

coïncident; nous voyons ainsi *qu'une homographie* H_k^n *possède une infinité de groupes composés de* r_1 *éléments coïncidents de* r_1 *séries, de* $r_2 + 1$ *éléments coïncidents de* $r_2 + 1$ *autres séries, et d'éléments appartenant aux séries restantes.* Si donc nous astreignons ces groupes à satisfaire à une condition supplémentaire, il n'existera qu'un nombre fini de pareils groupes.

La condition que nous nous imposons actuellement, c'est que l'élément B de la série i_{r_1+1} de chaque groupe coïncide avec l'élément r_1^{uple} des séries coïncidentes

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{r_2};$$

appelons A cet élément r_1^{uple}; nous venons de voir qu'à un élément A il correspond

$$(n - k)!\,(r_2 + 1)$$

éléments B.

A un élément B de la série i_{r_1+1} il correspond dans les séries restantes, des groupes de $n - 1$ éléments formant une homographie H_{k-1}^{n-1}; cette homographie possède des groupes en nombre fini, composés de r_1 éléments coïncidents A_1 des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{r_1},$$

et de $r_2 + 1$ éléments coïncidents des séries

$$i_{r_1+2}, \quad i_{r_1+3}, \quad \ldots, \quad i_{r_1+r_2+2}.$$

Soit $N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1)$ le nombre de ces groupes; nous voyons qu'à un élément B il correspond

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1)$$

éléments A. Entre les éléments A et B il existe la correspondance

$$\left(N_{k-1}^{n-1}(r_1 . r_2 + 1), \quad (n - k)!\,(r_2 + 1)\right);$$

donc, si nous représentons en général par la notation $N_p^q(k_1 . k_2)$ le nombre des groupes d'une homographie H_p^q qui contiennent

k_1 éléments coïncidents de k_1 séries déterminées et k_2 éléments coïncidents de k_2 autres séries, quand on a la condition $k_1 + k_2 = p + 2$, nous obtenons la relation

$$N_k^n(r_1 + 1 \,.\, r_2 + 1) = N_{k-1}^{n-1}(r_1 \,.\, r_2 + 1) + (n-k)!\,(r_2 + 1);$$

de même, nous aurons la suite d'équations :

$$\begin{aligned}
N_{k-1}^{n-1}(r_1 \,.\, \quad r_2+1) &= N_{k-2}^{n-2}(r_1 - 1, r_2 + 1) + (n-k)!\,(r_2+1),\\
N_{k-2}^{n-2}(r_1 - 1 \,.\, r_2+1) &= N_{k-3}^{n-3}(r_1 - 2 \,.\, r_2 + 1) + (n-k)!\,(r_2+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
N_{k-r_1+1}^{n-r_1+1}(2 \,.\, r_2+1) &= N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2 + 1) + (n-k)!\,(r_2+1),\\
N_{k-r_1}^{n-r_1}(1 \,.\, r_2 + 1) &= (n-k)!\,(r_2+1);
\end{aligned}$$

d'où, finalement,

$$N_k^n\big((r_1 + 1) \,.\, (r_2 + 1)\big) = (n-k)!\,(r_2 + 1)(r_1 + 1).$$

Si les supports des diverses séries coïncident, le nombre total des groupes contenant deux éléments $(r_1 + 1)^{uple}$ et $(r_2 + 1)^{uple}$ associés, est

$$(n-k)!\,(r_1 + 1)(r_2 + 1)\binom{n}{r_1 + 1}\binom{n - r_1 - 1}{r_2 + 1}$$
$$= \frac{n!}{r_1!\,r_2!}(n - k - 1)(n - k).$$

3. Supposons, pour plus de facilité dans ce qui va suivre, que les supports des n séries d'une H_k^n coïncident; admettons que nous connaissions le nombre des groupes de cette homographie qui contiennent q éléments multiples associés, d'ordres de multiplicité respectifs

$$r'_1 + 1, \quad r'_2 + 1, \quad \ldots, \quad r'_q + 1,$$

quand on a la condition

$$r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_q = k.$$

Connaissant ce nombre, quels que soient les nombres n, k et les indices de multiplicité, recherchons le nombre des groupes qui contiennent $q+1$ éléments multiples associés, d'ordres respectifs

$$r_1+1, \quad r_2+1, \quad \ldots, \quad r_q+1, \quad r_{q+1}+1,$$

quand on a la condition

$$r_1+r_2+\cdots+r_q+r_{q+1}=k.$$

Soit un élément quelconque A du support des n séries; considérons A, comme un élément $(r_{q+1})^{uple}$ des séries

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q+1}, \quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q+2}, \quad \ldots,$$
$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+r_{q+1}+q};$$

il lui correspond, dans les séries restantes, des groupes d'éléments formant une homographie d'ordre $n-r_{q+1}$ et de rang $k-r_{q+1}$.

Cette homographie possède des groupes composés de q éléments multiples associés, d'ordres

$$r_1+1, \quad r_2+1, \quad \ldots, \quad r_q+1,$$

appartenant aux séries respectives

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{r_1+1},$$
$$i_{r_1+2}, \quad i_{r_1+3}, \quad \ldots, \quad i_{r_1+r_2+2},$$
$$i_{r_1+r_2+3}, \quad i_{r_1+r_2+4}, \quad \ldots, \quad i_{r_1+r_2+r_3+3},$$

. . . .

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+q}, \quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+q+1}, \quad \ldots, \quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q},$$

en nombre fini, puisque l'on a

$$r_1+r_2+\cdots+r_q=k-r_{q+1}.$$

Représentons ce nombre par

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1+1, \ r_2+1, \ \ldots, \ r_q+1);$$

chacun de ces groupes contient un élément B, appartenant à la série

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q+1}+q+1};$$

si un de ces éléments B coïncide avec l'élément A, le groupe dont il fait partie est un des groupes dont nous recherchons le nombre.

A un élément A, il correspond donc

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1)$$

éléments B.

A un élément B de la série

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q+1}+q+1},$$

il correspond, dans l'homographie H_k^n, des groupes de $n-1$ éléments, formant une homographie H_{k-1}^{n-1}. Cette homographie possède des groupes contenant $q+1$ éléments multiples associés, d'ordres

$$r_1+1,\quad r_2+1,\quad \ldots,\quad r_q+1,\quad r_{q+1},$$

appartenant aux séries

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_{r_1+1},$$

$$i_{r_1+2},\quad i_{r_1+3},\quad \ldots,\quad i_{r_1+r_2+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+q},\quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+q+1},\quad \ldots,\quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q},$$

$$i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q+1},\quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_q+q+2},\quad \ldots,\quad i_{r_1+r_2+\cdots+r_{q+1}+q},$$

en nombre fini

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}),$$

puisqu'on a la condition

$$\sum^{q} r_i + r_{q+1} - 1 = k-1;$$

l'élément $(r_{q+1})^{uple}$ de chacun de ces groupes est un élément A; donc, à un élément B, il correspond

$$N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1})$$

éléments A.

Entre les éléments A et B, il existe la correspondance que nous venons d'établir; le nombre des coïncidences est égal au nombre des groupes cherchés; par conséquent, on a :

$$N_k^n(r_1+1, r_2+1, \ldots, r_q+1, r_{q+1}+1) = N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1, \ldots, r_q+1)$$
$$+ N_{k-1}^{n-1}(r_1+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1});$$

en traitant cette formule de récurrence comme précédemment, nous obtenons :

$$N_k^n(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}+1)$$
$$=(r_{q+1}+1)\,N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1).$$

De même, nous aurons la suite de relations :

$$N_{k-r_{q+1}}^{n-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1)$$
$$=(r_q+1)\,N_{k-r_q-r_{q+1}}^{n-r_q-r_{q+1}}(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_{q-1}+1),$$

. . . .

etc.

En combinant ces diverses équations par multiplication, nous obtenons définitivement :

$$N_k^n(r_1+1,\ r_2+1,\ \ldots,\ r_q+1,\ r_{q+1}+1)$$
$$=(n-k)!\ (r_1+1)\ (r_2+1)\ \ldots,\ (r_q+1)(r_{q+1}+1).$$

Ce nombre est celui des groupes de l'homographie H_k^n, qui contiennent $q+1$ éléments multiples associés, d'ordres

$$r_1+1,\quad r_2+1,\quad \ldots,\quad r_q+1,\quad r_{q+1}+1,$$

appartenant à des séries déterminées; le nombre total de ces groupes s'obtiendra en multipliant le nombre primitivement obtenu par

$$\binom{n}{r_1+1} \times \binom{n-r_1-1}{r_2+1} \times \binom{n-r_1-r_2-2}{r_3+1} \cdots \binom{n-r_1-r_2 \cdots -r_q-q}{r_{q+1}+1};$$

le nombre final est

$$\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ ..\ r_q!\ r_{q+1}!}\ \frac{(n-k)!}{(n-k-q-1)!}.$$

III

Groupes communs à deux ou plusieurs homographies.

1. Soient deux homographies de même ordre n et de rangs k et k' : nous supposons que les éléments des mêmes séries de ces homographies sont situés sur les mêmes supports.

Ces deux homographies peuvent être considérées comme étant respectivement l'ensemble des groupes communs à $n-k$ et à $n-k'$ homographies d'ordre n et de rang $n-1$; l'ensemble de ces $2n-k-k'$ homographies représente des groupes de n éléments, en nombre fini ou infini, selon que l'on a les conditions

$$2n-k-k'=n, \qquad \text{ou} \qquad 2n-k-k'<n.$$

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

L'ensemble des groupes communs à deux homographies d'ordre n *et de rangs* k *et* k', H^n_k *et* $H^n_{k'}$, *quand on a* $k+k' \geqq n$, *forment une homographie d'ordre* n *et de rang* $k'+k'-n$.

En général, m *homographies d'ordre* n *et de rangs* $k_1, k_2, \ldots k_m$ *ont en commun les groupes d'une homographie d'ordre* n *et de rang*

$$\sum^m k_i-(m-1)\,n,$$

quand on a

$$\sum^m k_i \geqq (m-1)\,n.$$

2. Soient deux homographies d'ordres respectifs m et n et du premier rang, H_1^m, H_1^n, $(m \leqq n)$: supposons que les supports des m séries de H_1^m coïncident avec les supports des m premières séries de H_1^n.

Les deux homographies peuvent avoir en commun des couples d'éléments de deux séries communes et qui appartiennent à des groupes distincts de ces deux homographies : nous représentons par X_i ou Y_i un élément de la $i^{ième}$ série commune aux deux homographies, suivant que nous considérons cet élément dans l'homographie H_1^m ou dans l'homographie H_1^n.

A un élément X_i de la $i^{ième}$ série, il correspond, dans H_1^m, $(m-1)!$ groupes de $m-1$ éléments des séries restantes et, en particulier, $(m-1)!$ éléments de la $p^{ième}$ série; à chacun de ces éléments, considéré comme élément Y_p, il correspond dans H_1^n $(n-1)!$ groupes de $n-1$ éléments de la $i^{ième}$ série.

Si un de ces éléments Y_i coïncidait avec l'élément X_i, nous aurions un des couples communs aux deux homographies.

A un élément X_i, il correspond donc

$$(m-1)!\,(n-1)!$$

éléments Y_i.

De même, à un élément Y_i, il correspond

$$(n-1)!\,(m-1)!$$

éléments X_i.

Entre les éléments X_i et Y_i, il existe la correspondance

$$\big((m-1)!\,(n-1)!,\ (n-1)!\,(m-1)!\big);$$

le nombre des coïncidences de cette correspondance est le nombre des couples communs aux deux homographies données et appartenant aux séries i et p; ce nombre sera donc

$$2\,(m-1)!\,(n-1)!.$$

Comme les deux homographies ont en commun les supports de m séries, le nombre total des couples communs sera

$$2\binom{m}{2}(m-1)!\,(n-1)!.$$

3. Soient deux homographies, l'une d'ordre n et de rang k, l'autre d'ordre m et du premier rang, H_k^n et H_1^m; nous faisons les mêmes suppositions que précédemment, quant aux supports communs aux séries de ces homographies.

A un élément X_{k+1} de la série i_{k+1}, il correspond, dans l'homographie H_1^m, $(m-1)!$ groupes de $(m-1)$ éléments et, en particulier, $(m-1)!$ groupes de k éléments des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k;$$

à chacun de ces groupes, considéré comme formé d'éléments

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_k,$$

il correspond $(n-k)!$ groupes de $(n-k)$ éléments dans H_k^n et, entre autres, $(n-k)!$ éléments Y_{k+1} de la série i_{k+1}; si un de ces éléments Y_{k+1} coïncidait avec l'élément X_{k+1}, nous aurions un groupe de $k+1$ éléments communs aux deux homographies et appartenant aux $k+1$ séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_k, \quad i_{k+1}.$$

A un élément X_{k+1}, il correspond donc

$$(m-1)!\,(n-k)!$$

éléments Y_{k+1}.

A un élément Y_{k+1}, il correspond dans H_k^n, des groupes de $n-1$ éléments formant une homographie H_{k-1}^{n-1}; cette homographie a en commun avec H_1^m, des groupes de k éléments des séries

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{k-1}, \quad i_k,$$

en nombre fini $N_{k-1\,1}^{n-1\,m}$.

(Nous représenterons désormais par la notation $N_{k'k''}^{n'n''}$ le nombre des groupes de $k'+k''$ éléments communs à deux homographies $H_{k'}^{n'}$ et $H_{k''}^{n''}$.)

A chacun des groupes communs, considéré comme composé d'éléments

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_k,$$

il correspond, dans l'homographie H_1^m, un élément X_{k+1} de la série X_{k+1}.

A un élément Y_{k+1}, il correspond donc $N_{k-1\,1}^{n-1\,m}$ éléments X_{k+1}. Entre les éléments X_{k+1} et Y_{k+1}, il existe la correspondance

$$\left((m-1)!\ (n-k)!,\ N_{k-1\,1}^{n-1\,m}\right);$$

le nombre des coïncidences est précisément le nombre $N_{k\,1}^{n\,m}$; ainsi nous aurons la relation :

$$N_{k\,1}^{n\,m} = (m-1)!\ (n-k)! + N_{k-1\,1}^{n-1\,m}.$$

Il résulte de la dernière formule que, si l'on a démontré qu'une homographie du premier rang a en commun avec une homographie de rang p, des groupes de $p+1$ éléments, elle aura avec une homographie de rang $p+1$, des groupes communs de $p+2$ éléments.

Or, nous avons démontré précédemment que deux homographies du premier rang ont des couples d'éléments communs; par récurrence, nous avons ainsi prouvé que *deux homagraphies du premier et du* k^{ième} *rang ont des groupes de* k + 1 *éléments communs*. Cette propriété doit être nécessairement démontrée, car elle n'est pas évidente *à priori*.

On peut déduire facilement de la formule précédente :

$$N_{k\,1}^{n\,m} = (k+1)\ (m-1)!\ (n-k)!.$$

Le nombre total des groupes communs à deux homographies H_k^n, H_1^m, dans les suppositions faites précédemment, est

$$\binom{m}{k+1} N_{k\,1}^{n\,m} = (k+1)\binom{m}{k+1}(m-1)!\ (n-k)!.$$

4. En général, soient deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$, $n_2 \leqq n_1$ et $k_1 + k_2 \leqq n_2$; de la même façon que plus haut, nous trouverons cette formule de récurrence :

$$N_{k_1\,k_2}^{n_1\,n_2} = N_{k_1-1\,k_2}^{n_1-1\,n_2} + N_{k_1\,k_2-1}^{n_1\,n_2-1}.$$

Il résulte de là que :

1° *Deux homographies* $H_{k_1}^{n_1}$ *et* $H_{k_2}^{n_2}$ *ont des groupes communs de* $k_1 + k_2$ *éléments communs, en nombre fini;*

2° *Le nombre de ces groupes communs appartenant à* $k_1 + k_2$ *séries communes déterminées, est*

$$\binom{k_1 + k_2}{k_1}(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)! = \frac{(k_1 + k_2)!\,(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)!}{k_1!\,k_2!}$$

3° *Le nombre total des groupes communs, dans les suppositions que nous avons faites, est*

$$\binom{n_2}{k_1 + k_2}\frac{(k_1 + k_2)!\,(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)!}{k_1!\,k_2!}.$$

5. Prenons un élément quelconque du support d'une série commune à deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$; il lui correspond dans ces homographies des groupes de $n_1 - 1$ et $n_2 - 1$ éléments, formant deux homographies $H_{k_1-1}^{n_1-1}$, $H_{k_2-1}^{n_2-1}$; ces deux homographies ont des groupes de $k_1 + k_2 - 2$ éléments communs appartenant à $k_1 + k_2 - 2$ séries communes déterminées, en nombre fini

$$(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)!\binom{k_1 + k_2 - 2}{k_2 - 1};$$

nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Un élément du support d'une série commune à deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ *et* $H_{k_2}^{n_2}$, *entre dans*

$$(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)!\binom{k_1 + k_2 - 2}{k_2 - 1}$$

groupes de $k_1 + k_2 - 1$ *éléments communs appartenant à* $k_1 + k_2 - 1$ *séries communes déterminées.*

Plus généralement, k *éléments des supports de* k *séries communes à deux homographies* $H_{k_1}^{n_1}$ *et* $H_{k_2}^{n_2}$, *entrent dans*

$$(n_1 - k_1)!\,(n_2 - k_2)!\binom{k_1 + k_2 - 2k}{k_1 - k}$$

groupes de $k_1 + k_2 - k$ *éléments communs appartenant à* $k_1 + k_2 - k$ *séries communes déterminées.*

6. Soient deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$; elles ont en commun des groupes communs de $k_1 + k_2 - 1$ éléments appartenant, par exemple, aux séries communes

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{k_1+k_2-1},$$

en nombre infini; recherchons combien il existe de ces groupes qui contiennent des couples d'éléments des séries i_1 et i_2 d'une homographie H_1^m, d'ordre m et du premier rang.

Représentons ce nombre par X_1^m.

A un élément A de la série i_1, considéré comme appartenant à l'homographie H_1^m, il correspond, dans cette homographie, $(m-1)!$ groupes de $m-1$ éléments des séries restantes, et, en particulier, $(m-1)!$ éléments de la série i_2. A chacun de ces derniers éléments, il correspond, dans les deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$, des groupes de $n_1 - 1$ et de $n_2 - 1$ éléments formant deux homographies $H_{k_1-1}^{n_1-1}$ et $H_{k_2-1}^{n_2-1}$.

Ces deux homographies ont des groupes de $k_1 + k_2 - 2$ éléments communs appartenant aux séries

$$i_1, \quad i_3, \quad \ldots, \quad i_{k_1+k_2-1},$$

en nombre

$$(n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1},$$

et, en particulier, autant d'éléments B du support i_1.

A un élément A, il correspond

$$(m-1)!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}$$

éléments B; de même, à un élément B, il correspond

$$(m-1)!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}$$

éléments A.

Le nombre des groupes cherchés est égal au nombre des coïncidences de la correspondance que nous venons d'établir; donc

$$X_1^m = 2(m-1)!\,(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)!\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}.$$

Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant : *Deux homographies superposées* $H_{k_1}^{n_1}$ *et* $H_{k_2}^{n_2}$ *contiennent*

$$2(m-1)!\,(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)! \times \binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}$$

groupes de k_1+k_2-1 *éléments appartenant à* k_1+k_2-1 *séries déterminées et comprenant un couple d'éléments d'une* H_1^m *appartenant à deux de ces séries communes.*

7. Soient deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$; recherchons combien il existe de groupes de k_1+k_2-1 éléments communs à ces homographies et appartenant aux séries

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_{k_1+k_2-1},$$

qui renferment $l+1$ éléments d'une homographie H_l^m et appartenant, par exemple, aux $l+1$ séries

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_{l+1}.$$

Soit X_l^m le nombre de ces groupes : à un élément A de la série i_1, considéré dans l'homographie H_l^m, il correspond dans cette dernière des groupes de $m-1$ éléments, formant une homographie H_{l-1}^{m-1}.

Cette homographie possède des groupes de l éléments appartenant aux séries

$$i_2,\quad i_3,\quad \ldots,\quad i_{l+1},$$

et compris dans des groupes de k_1+k_2-1 éléments communs à $H_{k_1}^{n_1}$ et à $H_{k_2}^{n_2}$, en nombre fini X_{l-1}^{m-1} : dans chacun de ces groupes, il figure un élément B de la série i_1.

Si un de ces éléments B coïncidait avec A, nous aurions un des groupes cherchés.

A un élément A, il correspond donc X_{l-1}^{m-1} éléments B.

A un élément B, il correspond, dans $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$ deux homographies $H_{k_1-1}^{n_1-1}$ et $H_{k_2-1}^{n_2-1}$; ces deux homographies ont en commun des groupes de $k_1 + k_2 - 2$ éléments communs des séries

$$i_2, \quad i_3, \quad \ldots, \quad i_{k_1+k_2-1},$$

en nombre fini

$$(n_1 - k_1)! \; (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1},$$

et donc, autant de groupes de l éléments des séries

$$i_2, \quad i_3, \quad \ldots, \quad i_{l+1}.$$

A chacun de ces groupes, il correspond $(m - l)!$ éléments A de la série i_1 dans l'homographie H_l^m ; par conséquent, à un élément B, il correspond

$$(m - l)! \; (n_1 - k_1)! \; (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}$$

éléments A.

Le nombre X_l^m est égal au nombre des coïncidences de la correspondance que nous venons d'établir ; donc :

$$X_l^m = X_{l-1}^{m-1} + (m - l)! \; (n_1 - k_1)! \; (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}.$$

Nous aurons, de même, la suite de relations :

$$X_{l-1}^{m-1} = X_{l-2}^{m-2} + (m - l)! \; (n_1 - k_1)! \; (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1},$$

. . . .

$$X_2^{m-l+2} = X_1^{m-l+1} + (m - l)! \; (n_1 - k_1)! \; (n_2 - k_2)! \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}.$$

Or, X_1^{m-l+1} est le nombre des couples d'éléments de deux séries déterminées d'une homographie H_1^{m-l+1}, qui sont compris dans des groupes de $k_1 + k_2 - 1$ éléments communs de

$k_1 + k_2 - 1$ séries déterminées de deux homographies $H^{n_1}_{k_1}$ et $H^{n_2}_{k_2}$; d'après ce que nous avons vu plus haut (V, III, 6), on a :

$$X_1^{m-l+1} = 2(m-l)!\,(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)!\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}.$$

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits précédemment nous conduisent à la formule :

$$X_l^m = (l+1)\,(m-l)!\,(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)!\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}.$$

8. Plus généralement, nous pouvons, de même, établir les résultats suivants :

1° *Le nombre des groupes de* $k_1 + k_2 - p$ *éléments communs à deux homographies* $H^{n_1}_{k_1}$ *et* $H^{n_2}_{k_2}$, *appartenant à* $k_1 + k_2 - p$ *séries déterminées qui contiennent des groupes de* $p + 1$ *éléments de* $p + 1$ *séries déterminées d'une homographie* H^m_l, *est*

$$(p+1)\,(m-1)!\,(n_1-k_1)\,(n_2-k_2)!\binom{k_1+k_2-2p}{k_1-p}.$$

2° *Le nombre des groupes communs de* $k_1 + k_2 - p$ *éléments, appartenant à* $k_1 + k_2 - p$ *séries déterminées de deux homographies* $H^{n_1}_{k_1}$ *et* $H^{n_2}_{k_2}$ *qui contiennent des groupes de* $l + p$ *éléments de* $p + 1$ *séries déterminées d'une homographie* H^m_l, *est*

$$(A) = \binom{l+p}{p}\binom{k_1+k_2-2p}{k_1-p}(m-l)!\,(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)!$$

9. Supposons que le rang l de l'homographie H^m_l soit tel qu'on ait

$$l + p = k_1 + k_2 - p;$$

alors, le nombre (A) devient le nombre des groupes d'éléments communs, appartenant à $k_1 + k_2 - p$ séries communes aux trois homographies $H^{n_1}_{k_1}$, $H^{n_2}_{k_2}$, H^m_l.

Posons

$$k_1 + k_2 - 2p = l = k_3, \quad m = n_3;$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Le nombre des groupes de μ éléments appartenant à μ séries communes déterminées de trois homographies superposées $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$, *quand on a*

$$\mu = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2},$$

est

$$\frac{\mu!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)!\ (n_3 - k_3)!}{(\mu - k_1)!\ (\mu - k_2)!\ (\mu - k_3)!}.$$

D'autre part, nous pouvons observer que, si une homographie $H_{k_3}^{n_3}$ a des groupes d'éléments communs avec deux homographies $H_{k_1}^{n_1}$ et $H_{k_2}^{n_2}$, il existe un nombre p tel que l'on ait

$$k_3 + p = k_1 + k_2 - p;$$

il faut donc que la somme des rangs de deux de ces homographies, diminuée du rang de la troisième, soit un nombre pair $2p$, ou, ce qui revient au même, que la somme des rangs des trois homographies soit un nombre pair $2(p + k_3)$.

Du reste, si la somme des rangs de trois homographies est un nombre pair, ces trois homographies ont des groupes d'éléments communs en nombre fini : il suffit pour le prouver de montrer que, dans ce cas, un des rangs est égal à la somme des autres, diminuée d'un nombre pair.

Soit $k_1 + k_2 + k_3 = 2m$; nous pouvons toujours écrire :

$$k_3 = k_1 + k_2 - \mathrm{R},$$

en admettant que le nombre k_3 est le plus petit des nombres k_1, k_2, k_3.

Or,

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2m;$$

donc

$$2(k_1 + k_2) - \mathrm{R} = 2m;$$

ce qui prouve que R est un nombre pair $2p$.

Nous pouvons, en conséquence, énoncer les théorèmes suivants :

1° *Trois homographies superposées ont des groupes d'éléments communs en nombre fini, quand la somme de leurs rangs est un nombre pair. Le facteur de parité est égal au nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs ;*

2° *Quand la somme des rangs de trois homographies* $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$, *est un nombre pair* 2μ, *ces trois homographies ont des groupes de* μ *éléments communs appartenant à* μ *séries déterminées, en nombre*

$$\frac{\mu!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)!\ (n_3 - k_3)!}{(\mu - k_1)!\ (\mu - k_2)!\ (\mu - k_3)!}.$$

10. *Si la somme des rangs de trois homographies* $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$, *diminuée d'un nombre* q, *est un nombre pair* 2m, *ces trois homographies possèdent des groupes de* m *éléments communs en nombre* q *fois infini.*

En effet, à q éléments appartenant respectivement à q séries communes déterminées, il correspond, dans les trois homographies $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$, des groupes de $n_1 - q$, $n_2 - q$, $n_3 - q$ éléments formant trois homographies $H_{k_1-q}^{n_1-q}$, $H_{k_2-q}^{n_2-q}$, $H_{k_3-q}^{n_3-q}$; la somme des rangs de ces trois dernières homographies est un nombre pair $2(m - q)$; par conséquent, ces trois homographies ont des groupes de $m - q$ éléments communs, en nombre fini; le nombre de ces groupes est

$$\frac{(m - q)!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)!\ (n_3 - k_3)!}{(m - q - k_1)!\ (m - q - k_2)!\ (m - q - k_3)!}.$$

Nous avons démontré de cette façon le théorème annoncé, ainsi que le théorème suivant :

Quand la somme des rangs de trois homographies, diminuée d'un nombre q, *est un nombre pair* 2m, q *éléments quelconques, appartenant à* q *séries déterminées, entrent dans*

$$\frac{(m - q)!\ (n_1 - k_1)!\ (n_2 - k_2)!\ (n_3 - k_3)!}{(m - q - k_1)!\ (m - q - k_2)!\ (m - q - k_3)!}$$

groupes de m *éléments appartenant à* m *séries communes déterminées.*

11. La méthode que nous avons employée pour établir ces propriétés est absolument générale : elle permet de déterminer la condition pour que $q+1$ homographies quelconques aient des groupes d'éléments communs en nombre fini et, le cas échéant, le nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs.

Voici encore, pour le cas de $q=3$, la méthode à suivre :

Soient trois homographies $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$ ayant des groupes communs de m éléments en nombre p fois infini; leurs rangs satisfont donc à la condition

$$\frac{k_1+k_2+k_3-p}{2}=m.$$

Il faudra rechercher le nombre A de ces groupes qui contiennent $l+p$ éléments de $l+p$ séries déterminées d'une homographie H_l^m.

Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire de résoudre quelques problèmes préliminaires semblables à ceux que nous avons traités précédemment.

On supposera, dans la formule qui donne la valeur de A, $l+p=k_4$ et $m=n_4$; on arrivera ainsi au théorème suivant :

Le nombre des groupes communs de μ *éléments, appartenant à* μ *séries communes déterminées de quatre homographies* $H_{k_1}^{n_1}$, $H_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_3}^{n_3}$, $H_{k_4}^{n_4}$, *est*

$$\frac{\mu!\ (n_1-k_1)!\ (n_2-k_2)!\ (n_3-k_3)!\ (n_4-k_n)}{(\mu-k_1)!\ (\mu-k_2)!\ (\mu-k_3)!\ (\mu-k_4)},$$

quand on a la condition

$$\mu=\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{3}.$$

Un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans le cas de $q=2$, nous permettra d'arriver à ces autres propriétés :

Si la somme des rangs de quatre homographies $H_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ *est un multiple du nombre* 3, *ces homographies ont des groupes d'éléments communs en nombre fini : le nombre des éléments qui figurent dans les groupes communs est égal au facteur de multiplicité.*

Si la somme des rangs de quatre homographies superposées est un multiple m *du nombre* 3, *augmenté d'un nombre* r, *ces homographies possèdent des groupes de* m *éléments communs en nombre* r *fois infini :* r *éléments quelconques de* r *séries déterminées figurent dans*

$$(m-r)!\,\frac{\prod\limits^{i=4}(n_i-k_i)!}{\prod\limits^{i=4}(m-r-k_i)!}$$

groupes, contenant m *éléments communs de* m *séries déterminées.*

12. Dans le cas général, nous arriverons aux théorèmes suivants :

Si la somme des rangs de n *homographies* $H_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ *est un multiple* μ *de* $n-1$, *ces homographies possèdent des groupes de* μ *éléments communs, appartenant à* μ *séries communes déterminées, en nombre fini ; ce nombre est*

$$\mu!\,\frac{\prod\limits^{i=n}(n_i-k_i)!}{\prod\limits^{i=n}(\mu-k_i)!}\,.$$

Si la somme des rangs de n *homographies* $H_{k_i}^{n_i}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ *est un multiple* m *de* $n-1$, *augmenté d'un nombre* r, *ces homographies possèdent des groupes communs de* m *éléments, appartenant à* m *séries communes déterminées, en nombre* r *fois infini :* r *éléments appartenant à* r *de ces séries figurent dans*

$$(m-r)!\,\frac{\prod\limits^{i=n}(n_i-k_i)!}{\prod\limits^{i=n}(m-r-k_i)!}$$

de ces groupes.

Ces théorèmes expriment, de la manière la plus générale, les propriétés des groupes communs à un nombre quelconque d'homographies d'ordres et de rangs quelconques.

Leur démonstration n'offre aucune difficulté spéciale : à cause de la longueur du raisonnement, nous nous dispenserons de l'indiquer. Du reste, la méthode à suivre est en tous points semblable à celle que nous avons employée, pour établir les théorèmes généraux sur les groupes communs à un nombre quelconque d'involutions.

Nos théorèmes donnent, comme conséquences, de nombreuses propriétés concernant les solutions communes à un nombre quelconque d'équations algébriques à plusieurs variables et de degrés quelconques.

Nous ne croyons pas devoir développer ces conséquences dans un travail dont le but est l'étude d'une théorie géométrique.

THÈSES ANNEXÉES AU MÉMOIRE.

THÈSE I.

Les rayons de deux congruences du premier ordre et de la première classe, qui passent par les points d'une surface d'ordre n, sont situés dans les plans tangents d'une surface de la classe $3n$. — Les rayons de deux congruences du premier ordre et de la première classe, qui sont situés dans les plans tangents d'une surface de la classe n, ont leurs points d'intersection situés sur une surface d'ordre $3n$.

THÈSE II.

A l'aide de deux corrélations homographiques entre les éléments linéaires de deux espaces à trois dimensions, superposés ou non, on peut établir une liaison telle qu'à un point de l'un des espaces, il corresponde une droite de l'autre espace, et réciproquement.

En général, aux points d'une droite d de l'un des espaces, il correspond les génératrices d'une réglée du second ordre de l'autre espace.

Le lieu des droites d, telles que les réglées correspondantes soient des cônes, est un complexe tétraédral.

THÈSE III.

Si les éléments principaux (points et droites) de deux plans superposés sont liés homographiquement, il existe une conique C telle qu'à tout point de cette courbe il correspond dans chaque figure une droite passant par ce point. Il existe, de même, une courbe de la seconde classe K jouissant de propriétés corrélatives. — Les deux courbes C et K permettent de construire tous les groupes de l'homographie. — Les deux courbes C et K ont entre elles un double contact. — Les points et les tangentes de contact sont les seuls éléments qui se correspondent doublement.

THÈSE IV.

L'équation canonique de l'involution unicursale biquadratique peut se déduire d'une représentation géométrique sur une conique.

THÈSE V.

Si les éléments principaux (points et espaces à $n - 1$ dimensions) de deux espaces superposés à n dimensions sont liés homographiquement, il existe $n + 1$ points tels que leurs espaces correspondants coïncident, selon que l'on passe de la première figure à la seconde, ou inversement.

Le polyèdre dont les sommets sont ces $n + 1$ points est le polyèdre polaire.

Quand le nombre n est pair, n sommets du polyèdre polaire sont situés dans leurs espaces correspondants ; quand le nombre n est impair, tous les sommets du polyèdre polaire jouissent de cette propriété.

THÈSE VI.

Dans les mêmes conditions que dans la thèse V, la considération du polyèdre polaire permet de trouver l'équation canonique de la corrélation homographique, aussi bien dans le cas d'un espace à un nombre impair de dimensions que dans le cas d'un espace à un nombre pair de dimensions.

THÈSE VII.

La corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à un nombre pair, n, de dimensions se ramène à la corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à $n - 1$ dimensions.

THÈSE VIII.

La corrélation polaire involutive entre les éléments d'un espace à un nombre impair, n, de dimensions est déterminée par $n - 1$ droites du système et par leurs espaces conjugués.

THÈSE IX.

Il y a une distinction intéressante à établir, au point de vue des correspondances homographiques et involutives, entre les espaces à un nombre pair de dimensions et les espaces à un nombre impair de dimensions.

TABLE DES MATIÈRES.

IV

V

Addition

CHAPITRE II

I

IV

V

VI

VII

Involutions conjuguées

CHAPITRE III

I

Détermination des involutions quelconques

II

Applications de la théorie de l'involution à la recherche des propriétés générales des courbes rationnelles des espaces linéaires

III

Courbes, surfaces et espaces d'involution

CHAPITRE IV

I

II

Représentation de certaines homographies H_{k-1}^k

III

Étude du cas de l'homographie cubique

IV

Applications

CHAPITRE V

I

Propriétés générales des homographies H_k^n

II

Éléments multiples et éléments multiples associés

III

Éléments communs à deux ou plusieurs homographies

ESSAI

D'UNE

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

FORMES ALGÉBRIQUES;

PAR

Jacques DERUYTS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE, ETC.

INTRODUCTION.

Dans le Mémoire actuel, nous nous sommes proposé de coordonner et de compléter les résultats de nos recherches sur la théorie des formes algébriques quelconques.

Depuis longtemps déjà les Géomètres se sont efforcés d'étendre au cas général les résultats essentiels établis pour les formes à séries de deux variables. La réduction des fonctions invariantes est la question qui a l'importance la plus considérable.

Dans un Mémoire célèbre (*), Clebsch a ramené toutes les fonctions invariantes à celles qui contiennent $n-1$ séries de variables d'espèces différentes; les variables dont il s'agit sont les coordonnées des éléments fondamentaux de l'espace à $n-1$ dimensions : elles peuvent s'exprimer comme des déterminants d'ordres $1, 2, \ldots, n-1$, qui ont pour éléments des variables d'une même espèce (variables ponctuelles). La méthode de Clebsch a été particulièrement développée par les auteurs allemands; elle doit ses plus importants perfectionnements aux travaux de M. Gordan.

(*) *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandl. der k. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Bd. XVII).

Une autre méthode a été introduite par M. Capelli (*); en faisant seulement usage des variables de même espèce, le savant Professeur de Naples a établi que toutes les fonctions invariantes sont réductibles à des fonctions invariantes contenant $n-1$ séries.

Dans le Mémoire que nous soumettons à l'appréciation des Géomètres, nous indiquons une nouvelle réduction; les fonctions invariantes réduites, que nous appelons *covariants primaires*, contiennent $n-1$ séries de n variables de même espèce : elles sont complètement caractérisées par l'annulation de certaines polaires du premier ordre. En raison de leur simplicité, les covariants primaires peuvent être soumis à une étude détaillée; cette étude paraîtra particulièrement importante, si l'on considère qu'elle équivaut à la théorie des fonctions invariantes quelconques. Parmi les résultats que nous avons obtenus, nous citerons notamment la loi de formation des covariants primaires et la détermination de leur nombre; les questions analogues ne paraissent pas avoir été résolues, d'une manière générale, pour les fonctions invariantes de réduction auxquelles on a été conduit antérieurement.

Nous mentionnerons encore la propriété des covariants primaires de s'exprimer en fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux; la démonstration dont nous avons fait usage repose sur la réduction des séries de polynômes, qui est due à M. Hilbert, et dont ce Géomètre avait déjà déduit la limitation du nombre des invariants.

Les différentes parties de nos recherches se rattachent à un même point de départ : « l'étude des modifications que présente

(*) *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (Mem. dei Lincei, 1882).

une quantité quelconque après une substitution linéaire ». D'après notre méthode, nous avons été amené à introduire des *fonctions semi-invariantes* (*); ces fonctions, qui n'avaient pas encore été considérées, se présentent d'elles-mêmes dans l'analyse des transformées; elles sont, du reste, en relation étroite avec les covariants primaires.

De même que M. Capelli, nous avons fait usage de variables d'une seule espèce; les variables contragrédientes et les variables analogues n'ont pas été introduites, comme étant réductibles. Les formes algébriques contiennent du reste un nombre quelconque de séries de n variables, le nombre n étant lui-même quelconque.

Pour plus de clarté, nous avons expliqué dans les Préliminaires les notations générales; en même temps, le principe de la représentation symbolique a été indiqué, afin de permettre l'emploi des expressions symboliques normales (symétriques par rapport aux systèmes équivalents de symboles).

Le Mémoire contient différentes parties que nous n'avions pas publiées jusqu'ici, notamment les chapitres VII et VIII. Les démonstrations que nous avions établies dans des travaux antérieurs ont été simplifiées en plusieurs points.

La plupart de nos résultats se réduisent, pour le cas de formes binaires, à des propriétés bien connues, que l'on doit à MM. Cayley, Aronhold, Clebsch, Gordan, Capelli, Sylvester, ...

(*) Précédemment, nous avions employé le terme de fonction semi-invariante *de première espèce*. Nous avons cru devoir simplifier cette dénomination, parce qu'il ne peut y avoir dans notre Mémoire aucune confusion avec les quantités qui ont été quelquefois désignées sous le nom de fonctions semi-invariantes (ou peninvariantes).

Nous ne pouvons terminer cette Introduction sans exprimer à M. le Professeur LE PAIGE notre vive gratitude pour les encouragements dont il a bien voulu nous honorer au cours de nos recherches.

Liège, le 5 octobre 1890.

J. D.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

Réduction des fonctions invariantes.

CHAPITRE V.

Étude des covariants primaires.

CHAPITRE VI.

Loi de formation des fonctions invariantes.

CHAPITRE VII.

Détermination du nombre des covariants primaires linéairement indépendants.

CHAPITRE VIII.

Considérations sur les particularités essentielles des formes algébriques.

ESSAI

D'UNE

THÉORIE GÉNÉRALE DES FORMES ALGÉBRIQUES.

PRÉLIMINAIRES.

Définitions et système des notations.

1. Notation des formes algébriques. — Nous désignerons par $x1, x2, \dots x\mu, \dots$ des séries de n variables indépendantes :

$$\begin{array}{l} x1_1,\ x1_2,\ \dots\ x1_n, \\ x2_1,\ x2_2,\ \dots\ x2_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\mu_1,\ x\mu_2,\ \dots\ x\mu_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Une *forme algébrique* sera une fonction f algébrique entière et homogène d'une ou plusieurs séries de variables $x1, x2, \dots x\mu \dots$ Si la forme f est des degrés $\alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha\mu$ pour les séries de variables $x1, x2, \dots x\mu$, nous écrirons :

$$f = \sum \binom{\alpha 1}{\alpha 1_1,\ \alpha 1_2,\ \dots\ \alpha 1_n} \binom{\alpha 2}{\alpha 2_1,\ \alpha 2_2,\ \dots\ \alpha 2_n} \dots \binom{\alpha\mu}{\alpha\mu_1,\ \alpha\mu_2,\ \dots\ \alpha\mu_n}$$
$$\times\, a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \dots \alpha 1_n,\ \alpha 2_1 \alpha 2_2 \dots \alpha 2_n,\ \dots \alpha\mu_1 \alpha\mu_2 \dots \alpha\mu_n}$$
$$\times\, x1_1^{\alpha 1_1} x1_2^{\alpha 1_2} \dots x1_n^{\alpha 1_n} x2_1^{\alpha 2_1} x2_2^{\alpha 2_2} \dots x2_n^{\alpha 2_n} \dots x\mu_1^{\alpha\mu_1} x\mu_2^{\alpha\mu_2} \dots x\mu_n^{\alpha\mu_n}.$$

Dans ce développement, la sommation doit être rapportée à tous les systèmes de nombres positifs ou nuls $\alpha 1_1, \alpha 1_2, \ldots \alpha 1_n$, $\alpha 2_1, \alpha 2_2, \ldots \alpha 2_n, \ldots \alpha\mu_1, \alpha\mu_2, \ldots \alpha\mu_n$, pour lesquels on a

$$\begin{aligned}
\alpha 1_1 + \alpha 1_2 + \cdots + \alpha 1_n &= \alpha 1,\\
\alpha 2_1 + \alpha 2_2 + \cdots + \alpha 2_n &= \alpha 2,\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\alpha\mu_1 + \alpha\mu_2 + \cdots + \alpha\mu_n &= \alpha\mu;
\end{aligned}$$

les notations analogues à $\binom{\alpha 1}{\alpha 1_1, \alpha 1_2, \ldots \alpha 1_n}$ désignent, suivant l'usage, les nombres polynomiaux tels que

$$\frac{\alpha 1!}{\alpha 1_1!\ \alpha 1_2!\ \ldots\ \alpha 1_n!}.$$

Dans l'expression de f, les quantités $a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \ldots \alpha\mu_n}$ sont les *coefficients* de la forme; moyennant le système de notation que nous venons d'indiquer, on peut assigner immédiatement le coefficient d'un produit quelconque de variables : il suffit d'observer que les séries d'indices des coefficients reproduisent, dans le même ordre, les séries d'exposants des variables.

Le mode de représentation indiqué pour f s'applique également à tout système de formes $f, f_1, \ldots$ Par exemple, si la forme f_1 est des degrés $\beta 1, \beta 2, \ldots \beta\nu$, pour les séries de variables $x1, x2, \ldots x\nu$, on écrira :

$$f_1 = \sum \binom{\beta 1}{\beta 1_1, \beta 1_2, \ldots \beta 1_n} \cdots \binom{\beta\nu}{\beta\nu_1, \beta\nu_2, \ldots \beta\nu_n} b_{\beta 1_1 \beta 1_2 \ldots \beta 1_n, \ \ldots \beta\nu_1 \ldots \beta\nu_n}$$
$$x1_1^{\beta 1_1} x1_2^{\beta 1_2} \ldots x1_n^{\beta 1_n} \ldots x\nu_1^{\beta\nu_1} \ldots x\nu_n^{\beta\nu_n}.$$

Sauf indication contraire, les coefficients de différentes formes doivent être supposés indépendants entre eux.

Quand il ne sera pas nécessaire d'écrire tous les indices qui affectent un coefficient, nous emploierons les notations $a_{\alpha 1_1 \ldots}$, $b_{\beta 1_1 \ldots}$ etc., au lieu de

$$a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \ldots \alpha 1_n \ldots \alpha\mu_n}, \quad b_{\beta 1_1 \beta 1_2 \ldots \beta 1_n \ldots \beta\nu_n}, \text{ etc.}$$

De même, nous indiquerons par

$$\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots}, \quad \varepsilon_{\beta 1_1 \ldots}, \text{ etc.,}$$

les produits de nombres polynomiaux qui multiplient les coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots}$, $b_{\beta 1_1 \ldots}$, etc.

Dans le cas de formes *linéaires*, le système de notation indiqué ci-dessus est trop compliqué; nous représenterons les coefficients par une lettre marquée d'un seul indice. Une forme linéaire telle que ξ_x s'écrira :

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n .$$

Nous désignerons sous le nom d'*éléments*, les variables et les coefficients de différentes formes; nous appellerons *éléments semblables* les différentes séries de variables et, de même, les séries de coefficients de formes des mêmes degrés par rapport aux variables. Sous la dénomination de *fonctions* (des éléments), nous comprendrons les fonctions algébriques entières et homogènes des différentes séries d'éléments.

2. Substitution linéaire. — Une substitution linéaire est l'opération qui consiste à remplacer toutes les séries de variables $x1, x2, \ldots x\mu \ldots$ par d'autres $X1, X2, \ldots X\mu, \ldots$ de telle façon que l'on ait en général :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \cdots + \alpha_{1n}X_n, \\ x_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{2n}X_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \alpha_{n1}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \cdots + \alpha_{nn}X_n. \end{array}\right\} \qquad (S)$$

Les lettres α_{ij} désignent des constantes, que nous appellerons les *paramètres* de la substitution; le déterminant $\delta = (\pm\, \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{ii} \ldots \alpha_{nn})$ est le *module* de S; il doit nécessairement avoir une valeur différente de zéro. A moins d'indication contraire, les paramètres doivent être considérés comme tout à fait quelconques.

TANSFORMÉES. — Nous dirons que les variables $X1_k$, $X2_k$, ... $X\mu_k$, ... $(k=1, 2, \dots n)$ sont les transformées des variables $x1_k$, $x2_k$, ... $x\mu_k$, ... pour la substitution S.

Toute forme

$$f=\sum \varepsilon_{\alpha 1_1} \dots a_{\alpha 1_1} \dots x1_1^{\alpha 1_1} x1_2^{\alpha 1_2} \dots x\mu_n^{\alpha \mu_n},$$

aux variables $x1$, $x2$, ... $x\mu$, a pour nouvelle expression une forme

$$f=F=\sum \varepsilon_{\alpha 1_1} \dots A_{\alpha 1_1} \dots X1_1^{\alpha 1_1} X1_2^{\alpha 1_2} \dots X\mu_n^{\alpha \mu_n}$$

des mêmes degrés, aux variables $X1$, $X2$, ... $X\mu$. Nous dirons que les quantités $A_{\alpha 1_1 \dots}$ sont les transformées des coefficients $a_{\alpha 1_1 \dots}$; ces transformées s'expriment évidemment en fonctions linéaires des coefficients primitifs.

Soient

$$B_{\beta 1_1 \dots}, \quad C_{\gamma 1_1 \dots}, \text{ etc.},$$

les transformées des coefficients $b_{\beta 1_1 \dots}$, $c_{\gamma 1_1 \dots}$, etc., de différentes formes algébriques. Soit, d'autre part,

$$g=g\,(a_{\alpha 1_1 \dots}, \quad b_{\beta 1_1 \dots}, \quad c_{\gamma 1_1 \dots}, \quad x1, \quad x2, \dots)$$

une fonction de différents éléments : nous appellerons *transformée* de g, la fonction analogue des éléments transformés, savoir :

$$G=g\,(A_{\alpha 1_1} \dots, \quad B_{\beta 1_1} \dots, \quad C_{\gamma 1_1} \dots, \quad X1, \; X2, \dots).$$

En général, nous conviendrons de désigner par les lettres majuscules, les transformées des fonctions représentées par les lettres minuscules correspondantes.

FONCTIONS INVARIANTES. — Si la transformée G diffère seulement de g par une puissance du module δ, nous dirons que g est une *fonction invariante*. Nous représenterons les fonctions invariantes par les caractéristiques φ; nous aurons ainsi, comme équation de définition,

$$\Phi=\delta^{\pi} . \varphi .$$

L'exposant π est nécessairement un nombre entier, positif, négatif ou nul; car les transformées des différents éléments (variables et coefficients), exprimés au moyen des éléments primitifs, sont des fonctions algébriques rationnelles des paramètres α_{ij} de la substitution.

En particulier, la dénomination d'*invariant* s'appliquera aux fonctions invariantes indépendantes des variables; nous appellerons encore *covariants identiques,* les fonctions invariantes qui dépendent seulement des variables.

Les sommes de produits de fonctions invariantes sont évidemment des fonctions invariantes, quand elles sont homogènes par rapport aux différentes séries d'éléments (*).

3. Polaires. — Soient $a_{\alpha 1_1 \ldots}$, etc., $a'_{\alpha 1_1 \ldots}$, etc., deux séries de coefficients semblables; nous définirons l'opération $a' \frac{d}{da}$ par la formule

$$a' \frac{d}{da} = \sum a'_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{d}{da_{\alpha 1_1 \ldots}},$$

en étendant la sommation à tous les systèmes d'indices correspondants des coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ et $a'_{\alpha 1_1 \ldots}$. Nous appellerons *polaire de* g *par rapport aux coefficients,* toute somme homogène g' de fonctions, que l'on peut obtenir en appliquant à g une ou plusieurs opérations analogues à $a' \frac{d}{da}$. L'opération O_c, par laquelle on déduit g' de g, est une *opération polaire relative aux coefficients :* elle est représentée schématiquement par une fonction entière des symboles d'opérations tels que $a' \frac{d}{da}$.

(*) Toute forme algébrique est une fonction invariante.

Si l'on désigne par

$$\xi 1_x = \xi 1_1 x_1 + \xi 1_2 x_2 + \cdots + \xi 1_n x_n, \quad \xi 2_1 x_1 + \xi 2_2 x_2 + \cdots + \xi 2_n x_n, \cdots$$

des formes linéaires, le déterminant

$$(\pm\, \xi 1_1\, \xi 2_2 \ldots \xi n_n)$$

est un invariant.

Le déterminant $(\pm\, x 1_1\, x 2_2 \ldots x n_n)$ est un covariant identique.

Semblablement, nous appellerons *polaire de* g *par rapport aux variables,* toute somme homogène g'', de fonctions que l'on déduit de g au moyen d'opérations telles que

$$y\frac{d}{dx} = y_1\frac{d}{dx_1} + y_2\frac{d}{dx_2} + \cdots + y_n\frac{d}{dx_n},$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ étant des variables analogues à $x_1, x_2, \ldots x_n$. On écrira

$$g'' = \mathrm{O}_v g,$$

et O_v sera une *opération polaire relative aux variables.*

Si g_1 diffère seulement de g par la substitution d'éléments à des éléments semblables, il est évident que g_1 est une polaire de g ; par suite, toute polaire de g_1 est aussi une polaire de g.

En faisant usage de la formule de Leibnitz, on vérifie qu'*une polaire d'un produit est une somme de produits de polaires des facteurs.*

Notation. — On indiquera par $\left(a'\frac{d}{da}\right)^{\varepsilon_1} g$, la fonction que l'on déduit de g en appliquant ε_1 fois de suite l'opération $a'\frac{d}{da}$. De même,

$$\left(b'\frac{d}{db}\right)^{\varepsilon_2}\left(a'\frac{d}{da}\right)^{\varepsilon_1} g$$

servira à désigner le résultat obtenu, en appliquant ε_2 fois l'opération $b'\frac{d}{db}$ à la quantité $\left(a'\frac{d}{da}\right)^{\varepsilon_1} g$; ce système de notation se généralise immédiatement et s'applique d'une manière tout à fait analogue pour les polaires relatives aux variables.

4. Soient $e_1, e_2, \ldots e_u$; $e'_1, e'_2, \ldots e'_u$ deux séries semblables d'éléments (de variables ou de coefficients); ces éléments s'expriment de la même manière en fonctions linéaires de leurs transformées $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots \mathrm{E}_u$; $\mathrm{E}'_1, \mathrm{E}'_2, \ldots \mathrm{E}'_u$; on a donc

$$\frac{de'_i}{d\mathrm{E}'_j} = \frac{de_i}{d\mathrm{E}_j}.$$

Conséquemment, on peut écrire :

$$\frac{d}{de_i} = \frac{dE_1}{de_i}\frac{d}{dE_1} + \frac{dE_2}{de_i}\frac{d}{dE_2} + \cdots + \frac{dE_u}{de_i}\frac{d}{dE_u},$$

$$e'_i = E'_1\frac{de_i}{dE_1} + E'_2\frac{de_i}{dE_2} + \cdots + E'_u\frac{de_i}{dE_u}.$$

On déduit de là :

$$e'_1\frac{d}{de_1} + e'_2\frac{d}{de_2} + \cdots = E'_1\frac{d}{dE_1} + E'_2\frac{d}{dE_2} + \cdots,$$

c'est-à-dire :

$$e'\frac{d}{de} = E'\frac{d}{dE}.$$

Les polaires

$$y\frac{d}{dx}g \quad \text{et} \quad a'\frac{d}{da}g$$

de la fonction g, ont pour transformées :

$$Y\frac{d}{dX}G, \quad A'\frac{d}{dA}G;$$

d'après la dernière équation obtenue, ces transformées peuvent s'écrire :

$$y\frac{d}{dx}G, \quad a'\frac{d}{da}G.$$

Il résulte de là que *toute polaire d'une fonction a pour transformée la polaire analogue de la fonction transformée* (*).

(*) On doit à M. Capelli une étude approfondie des opérations polaires; les résultats obtenus par le savant Professeur de Naples ont été publiés dans les *Memorie d. R. Academia dei Lincei* (1882) et dans les *Atti d. R. Academia in Napoli* (1887-88).

Représentation symbolique (*).

5. En général, il est peu commode d'exprimer directement la transformée G, d'une fonction g des coefficients de formes quelconques. Au contraire, on peut déterminer facilement les transformées des coefficients de formes linéaires et, par suite, la transformée d'une fonction g_s dépendant de ces seuls coefficients. En effet, pour une forme linéaire

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n,$$

on a, d'après les équations de la substitution linéaire (§ 2),

$$\xi_x = \Xi_1 X_1 + \Xi_2 X_2 + \cdots + \Xi_n X_n,$$

en posant :

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n,\\
\Xi_2 &= \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{n2}\xi_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Xi_n &= \alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{2n}\xi_2 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n.
\end{aligned}$$

Comme nous allons le voir, à toute fonction g on peut associer *une ou plusieurs* fonctions g_s, de telle manière qu'une fonction g_s et sa transformée G_s déterminent, sans ambiguïté et dans les mêmes conditions, la fonction g et sa transformée G; à ce point de vue, g_s est *une expression symbolique* de g, et l'on écrit :

$$g \equiv g_s.$$

6. Représentation des formes algébriques. — Soit

$$f = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1} \cdots a_{\alpha 1_1} \cdots x1_1^{\alpha 1_1} \cdots x\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

(*) La représentation symbolique a été introduite par Aronhold et M. Cayley (*Journal de Crelle*, t. XXX, XXXIX et LV). Voir aussi les Mémoires de Clebsch (*Journal de Crelle*, t. LIX) et de M. Camille Jordan (*Journal de Liouville*, 3e série, t. II).

une forme algébrique des degrés $\alpha 1$, $\alpha 2$, ... $\alpha\mu$ pour les séries de variables $x1$, $x2$, ... $x\mu$. Les relations linéaires qui ont lieu entre les coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ et $A_{\alpha 1_1 \ldots}$ sont déterminées par la substitution des variables; elles sont indépendantes des déterminations particulières de f.

Considérons μ formes linéaires

$$a1_{x1} = a1_1 x1_1 + a1_2 x1_2 + \cdots + a1_n x1_n,$$

$$a2_{x2} = a2_1 x2_1 + a2_2 x2_2 + \cdots + a2_n x2_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a\mu_{x\mu} = a\mu_1 x\mu_1 + a\mu_2 x\mu_2 + \cdots + a\mu_n x\mu_n;$$

quand on donne à f la détermination particulière

$$f_s = a1_{x1}^{\alpha 1}\, a2_{x2}^{\alpha 2} \ldots a\mu_{x\mu}^{\alpha\mu},$$

les coefficients $a_{\alpha 1_1\, \alpha 1_2 \ldots \alpha 1_n; \ldots \alpha\mu_1 \ldots \alpha\mu_n}$ ont pour valeurs

$$a1_1^{\alpha 1_1}\, a1_2^{\alpha 1_2} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} \ldots a\mu_1^{\alpha\mu_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n};$$

les transformées $A_{\alpha 1_1\, \alpha 1_2 \ldots \alpha 1_n \ldots \alpha\mu_n}$ ont de même les valeurs

$$A1_1^{\alpha 1_1}\, A1_2^{\alpha 1_2} \ldots A1_n^{\alpha 1_n} \ldots A\mu_n^{\alpha\mu_n}.$$

Il existe des relations linéaires analogues, d'une part entre les produits

$$a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n} \quad \text{et} \quad A1_1^{\alpha 1_1} \ldots A\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

d'autre part entre les coefficients

$$a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n} \quad \text{et} \quad A_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}.$$

On peut donc faire correspondre les quantités

$$a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n} \quad \text{et} \quad a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

sans ambiguïté et de telle façon que les quantités transformées se correspondent de la même manière. A ce point de vue,

$$a1_1^{\alpha 1_1} \dots a\mu_n^{\alpha\mu_n}$$

représente symboliquement $a_{\alpha 1_1} \dots$, et le produit

$$A1_1^{\alpha 1_1} \dots A\mu_n^{\alpha\mu_n}$$

est l'expression symbolique de $A_{\alpha 1_1 \dots \alpha\mu_n}$. On écrira :

$$a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \dots \alpha 1_n \dots \alpha\mu_1 \dots \alpha\mu_n} \equiv a1_1^{\alpha 1_1} a1_2^{\alpha 1_2} \dots a1_n^{\alpha 1_n} \dots a\mu_1^{\alpha\mu_1} \dots a\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

$$f \equiv a1_{x1}^{\alpha 1}\, a2_{x2}^{\alpha 2} \dots a\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}.$$

On emploiera des représentations symboliques analogues pour les différentes formes que l'on aura à considérer.

Représentation symbolique des fonctions linéaires. — Soit g' une fonction linéaire, par rapport aux coefficients de formes représentées symboliquement par

$$f \equiv a1_{x1}^{\alpha 1} \dots a\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}, \qquad f_1 \equiv b1_{x1}^{\beta 1} \dots b\nu_{x\nu}^{\beta\nu}, \text{ etc.}$$

On aura :

$$g' = \sum g^0 a_{\alpha 1_1 \dots \alpha\mu_n} b_{\beta 1_1 \dots \beta\nu_n} \dots,$$

en désignant par g^0 une fonction des variables seulement. Si l'on remplace les coefficients par leurs expressions symboliques, on obtient :

$$g'_s = \sum g^0 a1_1^{\alpha 1_1} \dots a\mu_n^{\alpha 1_n} b1_1^{\beta 1_1} \dots b\nu_n^{\beta\nu_n} \dots$$

La fonction g'_s est du premier degré par rapport aux produits

$$a1_1^{\alpha 1_1} \dots a\mu_n^{\alpha\mu_n}, \qquad b1_1^{\beta 1_1} \dots b\nu_n^{\beta\nu_n}, \dots;$$

en conséquence g'_s n'est exprimable que d'une seule manière au moyen de ces produits. En d'autres termes, g'_s détermine sans ambiguïté la quantité g', si l'on fait correspondre les produits

$$a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n}, \text{ etc.},$$

aux coefficients

$$a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}, \text{ etc.}$$

Puisque les coefficients et leurs expressions symboliques ont des relations semblables avec leurs transformées, les fonctions G′, G'_s s'expriment de la même manière, l'une au moyen des quantités $a_{\alpha 1_1}$ ..., etc., l'autre au moyen des produits $a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n}$, etc. D'après ces considérations, on écrira symboliquement :

$$g' \equiv g'_s, \qquad f \equiv a1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}, \qquad f_1 \equiv b1_{x1}^{\beta 1} \ldots b\nu_{x\nu}^{\beta\nu}, \text{ etc.};$$

on aura dans les mêmes conditions

$$G' \equiv G'_s.$$

Représentation symbolique des fonctions quelconques. — Soit g une fonction des degrés $u, v, \ldots$ pour les coefficients de formes

$$f = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a_{\alpha 1_1 \ldots} x1_1^{\alpha 1_1} \ldots x\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

$$f_1 = \sum \varepsilon_{\beta 1_1 \ldots} b_{\beta 1_1 \ldots} x1_1^{\beta 1_1} \ldots x\nu_n^{\beta\nu_n}, \text{ etc.} \ldots$$

Considérons u nouvelles formes semblables à f :

$$f' = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a'_{\alpha 1_1 \ldots} x1_1^{\alpha 1_1} \ldots, \qquad \ldots f^{(u)} = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a^{(u)}_{\alpha 1_1 \ldots} x1_1^{\alpha 1_1} \ldots;$$

soit de même

$$f_1 = \sum \varepsilon_{\beta 1_1 \ldots} b'_{\beta 1_1 \ldots} x1_1^{\beta 1_1 \ldots}, \qquad \ldots f_1^{(v)} = \sum \varepsilon_{\beta 1_1 \ldots} b^{(v)}_{\beta 1_1 \ldots} x1_1^{\beta 1_1 \ldots},$$

un groupe de v nouvelles formes semblables à f_1, et ainsi de suite.

On peut toujours trouver une fonction g', linéaire par rapport aux coefficients de

$$f, f', \ldots f^{(u)}, f'_1, f''_1, \ldots f_1^{(v)}, \ldots$$

et telle que g' se réduise à g, quand on identifie à $f, f_1, \ldots$ les groupes de formes

$$(f', f'', \ldots f^{(u)}), \quad (f'_1, f''_1, \ldots f_1^{(v)}) \ldots$$

En effet, si l'on écrit

$$g = \sum g^{(0)} a_{\alpha 1_1} \ldots a_{\alpha' 1_1} \ldots a_{\alpha'' 1_1} \ldots \ldots b_{\beta 1_1} \ldots b_{\beta' 1_1} \ldots \ldots,$$

on prendra, par exemple :

$$g' = \sum g^{(0)} a'_{\alpha 1_1} \ldots a''_{\alpha' 1_1} \ldots a'''_{\alpha'' 1_1} \ldots \ldots b'_{\beta 1_1} \ldots b''_{\beta' 1_1} \ldots \ldots$$

Dans les conditions actuelles, la quantité g' et sa transformée G′ déterminent sans ambiguïté g et G; d'après ce qui précède, la fonction g' et la transformée G′ sont complètement déterminées par l'expression symbolique g'_s et la transformée G'_s. Soit, en équations symboliques,

$$g' \equiv g'_s,$$

$$f \equiv a'1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a'\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}, \quad f'' \equiv a''1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a''\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}, \quad \ldots f^{(u)} \equiv a^u 1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a^u \mu_{x\mu}^{\alpha\mu},$$

$$f_1 \equiv b'1_{x1}^{\beta 1} \ldots b'\nu_{x\nu}^{\beta\nu}, \quad \ldots f_1^{(v)} \equiv b^v 1_{x1}^{\beta 1} \ldots b^v \nu_{x\nu}^{\beta\nu}; \text{ etc.} \ldots$$

On considérera g'_s comme une expression symbolique de g, et, pour indiquer la correspondance qui a lieu entre les fonctions g, g'_s, on écrira :

$$g \equiv g'_s;$$

$$f \equiv a'1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a'\mu_{x\mu}^{\alpha\mu} \equiv a''1_{x1}^{\alpha 1} \cdots \equiv \cdots \equiv a^u 1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a^u \mu_{x\mu}^{\alpha\mu},$$

$$f_1 \equiv b'1_{x1}^{\beta 1} \ldots b'\nu_{x\nu}^{\beta\nu} \equiv \cdots \equiv b^v 1_{x1}^{\beta 1} \ldots b^v \nu_{x\nu}^{\beta\nu}, \text{ etc.}$$

On aura dans les mêmes conditions $G \equiv G'_s$.

Pour obtenir g au moyen de g'_s, on remplacera les coefficients de

$$a'1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a'\mu_{x\mu}^{\alpha\mu}, \quad \ldots a^v 1_{x1}^{\alpha 1} \ldots a^v \mu_{x\mu}^{\alpha\mu},$$

par les coefficients de f; on remplacera de même les coefficients de

$$b'1_{x1}^{\beta 1} \ldots, \quad \ldots, b^v 1_{x1}^{\beta 1} \ldots$$

par les coefficients de f_1, etc. Les systèmes de symboles $a', a'', \ldots a^u$ sont ainsi *équivalents* : il en est de même des systèmes $b', b'', \ldots b^v$. Le nombre des symboles équivalents, relatifs à une forme f, dans l'expression symbolique g'_s, est précisément le degré u de la fonction effective g, par rapport aux coefficients de f.

Si l'on permute dans g' ou dans une partie de g' les coefficients de

$$f', f'', \ldots f^{(u)}, \quad \text{de} \quad f'_1, f''_1, \ldots f_1^{(v)}, \text{ etc.},$$

on obtient une fonction linéaire g'', réductible à g en même temps que g'. L'expression symbolique g''_s de g'' peut servir à représenter g dans les mêmes conditions que g'_s; on déduit donc d'une expression symbolique g'_s une expression symbolique *équivalente* g''_s, en permutant dans g'_s ou dans une partie de g'_s, des systèmes de symboles équivalents.

7. Expressions symboliques normales. — Ajoutons à g' les fonctions qu'on obtient en permutant, de toutes les manières possibles, les formes comprises dans les groupes

$$(f', f'', \ldots f^{(u)}), \quad (f'_1, f''_1, \ldots f_1^{(v)}) \ldots$$

Abstraction faite d'un multiplicateur numérique, nous obtiendrons une fonction linéaire g'_1 réductible à g, en même temps que g', et symétrique par rapport aux différents groupes de formes.

Il est visible que g'_1 est la seule fonction qui jouisse de ces propriétés. Soit g'_{1s}, l'expression symbolique de g'_1; on aura, d'après ce qui précède,

$$g \equiv g'_{1s}; \quad f \equiv a'1_{x1}^{\alpha 1} \cdots \equiv \cdots \equiv a^u 1_{x1}^{\alpha 1} \ldots;$$

$$f_1 \equiv b'x_1^{\beta 1} \cdots \equiv \cdots \equiv b^v 1_{x1}^{\beta 1}; \text{ etc.} \ldots$$

Nous dirons que g'_{1s} est l'*expression symbolique normale* de g. Ainsi, *l'expression symbolique normale est caractérisée par la propriété d'être symétrique par rapport aux systèmes de symboles équivalents* (a', a'', ... a^u), (b', b'', ... b^v) ...

La transformée G'_{1s} est symétrique en même temps que g'_{1s}, par rapport aux symboles équivalents. Par conséquent, *la transformée* G'_{1s} *de l'expression symbolique normale* g'_{1s}, *est l'expression symbolique normale de* G.

Par la définition, l'expression symbolique normale d'une fonction est tout à fait déterminée; d'autre part, si la fonction est nulle, il en est de même de sa représentation. En conséquence, *une fonction symbolique normale, différente de zéro, correspond toujours à une fonction effective différente de zéro.*

Dans la suite, les expressions symboliques devront être supposées quelconques, sauf indication contraire.

8. Les expressions symboliques se rapportent seulement aux coefficients des formes; donc, *toute opération* D_v, *relative aux variables, peut être effectuée soit directement sur une fonction* g, *soit sur une expression symbolique* g'_s *de* g. On a :

$$D_v g \equiv D_v g'_s;$$

et $D_v g'_{1s}$ est l'expression symbolique normale de $D_v g$.

Exemples. — Les dérivées d'une fonction par rapport aux variables sont représentées par les dérivées de l'expression symbolique : la même propriété a lieu pour les polaires relatives aux variables.

CHAPITRE I.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS INVARIANTES ET LES SYSTÈMES TRANSFORMABLES.

Systèmes transformables.

9. Soient $p_1, p_2, \ldots p_r$, des fonctions qui s'expriment, au moyen de leurs transformées, par les équations

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \theta_{11}P_1 + \theta_{12}P_2 + \cdots + \theta_{1r}P_r, \\ p_2 = \theta_{21}P_1 + \theta_{22}P_2 + \cdots + \theta_{2r}P_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_r = \theta_{r1}P_1 + \theta_{r2}P_2 + \cdots + \theta_{rr}P_r, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

les lettres θ désignant des fonctions rationnelles des paramètres α_{ij} de la substitution : nous dirons que $(p_1, p_2, \ldots p_r)$ est un *système transformable* (*). Soit $(p'_1, p'_2, \ldots p'_r)$, un deuxième système transformable : les systèmes (p) et (p') sont *cogrédients*, si l'on a des relations

$$\begin{array}{l} \delta^\varepsilon p'_1 = \theta_{11}P'_1 + \theta_{12}P'_2 + \cdots + \theta_{1r}P'_r, \\ \delta^\varepsilon p'_2 = \theta_{21}P'_2 + \theta_{22}P'_2 + \cdots + \theta_{2r}P'_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta^\varepsilon p'_r = \theta_{r1}P'_1 + \theta_{r2}P'_2 + \cdots + \theta_{rr}P'_r, \end{array}$$

ε désignant un nombre entier, positif, nul ou négatif.

Ainsi, par exemple, on déduit de $(p_1, p_2, \ldots p_r)$ un système cogrédient en remplaçant des séries d'éléments par des séries d'éléments semblables : il en est de même, si l'on multiplie toutes les quantités p par une fonction invariante.

(*) Par exemple, les variables (ou les coefficients) d'une même série constituent un système transformable.

10. Supposons que le système des quantités p est le groupe complet des dérivées de même ordre d'une fonction invariante déterminée φ_1, prises par rapport à différents éléments

$$a_{\alpha 1_1 \ldots},\ b_{\beta 1_1 \ldots},\ \ldots\ x1,\ x2,\ \ldots;$$

nous admettrons que ces dérivées n'ont entre elles aucune relation du premier degré.

Si l'on désigne les quantités p par

$$\frac{d^{\cdots}\varphi_1}{da_{\alpha 1 \ldots} \ldots db_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dx1_1 \ldots},$$

les transformées P auront pour valeurs les dérivées

$$\frac{d^{\cdots}\Phi_1}{dA_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots dB_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dX1_1 \ldots}.$$

D'après la formule $\Phi_1 = \delta^{\pi}\varphi_1$, les relations qui ont lieu entre les quantités p et P résultent directement des relations qui existent entre les groupes de dérivées linéairement indépendantes

$$\frac{d^{\cdots}\varphi_1}{da_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots db_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dx1_1 \ldots} \quad \text{et} \quad \frac{d^{\cdots}\varphi_1}{dA_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots dB_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dX1_1 \ldots}.$$

Des relations analogues ont lieu entre les dérivées

$$\frac{d^{\cdots}g}{da_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots db_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dx1_1 \ldots} \quad \text{et} \quad \frac{d^{\cdots}g}{dA_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots dB_{\beta 1_1 \ldots} \ldots dX1_1 \ldots},$$

d'une quantité quelconque g. Si l'on prend pour g une fonction invariante φ, on obtient entre les dérivées

$$\frac{d^{\cdots}\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots db_{\beta 1_1} \ldots dx1_1 \ldots} \quad \text{et} \quad \frac{d^{\cdots}\Phi}{dA_{\alpha 1_1 \ldots} \ldots dB_{\beta 1_1} \ldots dX1_1 \ldots}$$

les mêmes équations qu'entre les quantités p et P, abstraction faite d'une puissance du module δ. En conséquence, *si un système transformable est composé des dérivées (linéairement indépendantes) d'une fonction invariante particulière φ_1, on obtient un système cogrédient en remplaçant les dérivées de φ_1 par les dérivées d'une fonction invariante quelconque φ.*

Applications (*). — I. En considérant la forme

$$f = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a1_{\alpha 1_1 \ldots \alpha \mu_n} x1_1^{\alpha 1_1} x1_2^{\alpha 1_2} \ldots x1_n^{\alpha 1_n} \ldots x\mu_1^{\alpha \mu_1} \ldots x\mu_n^{\alpha \mu_n},$$

on obtient :

$$a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \ldots \alpha \mu_n} = \frac{1}{\alpha 1\,!\,\alpha 2\,!\ldots \alpha\mu\,!} \cdot \frac{d^{\alpha 1 + \ldots + \alpha\mu} f}{dx1_1^{\alpha 1_1} dx1_2^{\alpha 1_2} \ldots dx\mu_n^{\alpha \mu_n}},$$

$$x1_1^{\alpha 1_1} x1_2^{\alpha 1_2} \ldots x1_n^{\alpha 1_n} \ldots x\mu_1^{\alpha \mu_1} \ldots x\mu_n^{\alpha \mu_n} = \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots}} \cdot \frac{df}{da_{\alpha 1_1 \ldots \alpha \mu_n}}.$$

Par suite, *les coefficients* $a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha \mu_n}$ *et les produits* $x1_1^{\alpha 1_1} \ldots x\mu_n^{\alpha \mu_n}$ *sont respectivement cogrédients aux dérivées*

$$\frac{d^{\alpha 1 + \ldots + \alpha\mu} \varphi}{dx1_1^{\alpha 1_1} \ldots dx\mu_n^{\alpha \mu_n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots}} \frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots \alpha \mu_n}}.$$

II. *Les produits de dérivées premières de fonctions invariantes quelconques* $\varphi, \varphi_1, \ldots$, *sont cogrédients des dérivées multiples correspondantes de* φ.

Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il s'agit des produits de dérivées de φ; le mode de démonstration sera le même dans le cas général. Nous écrirons :

$$p = \left(\frac{d\varphi}{dx1_1}\right)^{\varepsilon 1_1} \ldots \left(\frac{d\varphi}{dx2_1}\right)^{\varepsilon 2_1} \ldots \left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}\right)^{\varepsilon' 1_1} \ldots \left(\frac{d\varphi}{db_{\beta 1_1 \ldots}}\right)^{\varepsilon' 2_1} \ldots$$

et nous désignerons par $\varepsilon 1, \varepsilon 2, \ldots \varepsilon' 1, \varepsilon' 2, \ldots$ les degrés de p relativement aux dérivées

$$\frac{d\varphi}{dx1}, \frac{d\varphi}{dx2}, \ldots \frac{d\varphi}{da}, \frac{d\varphi}{db} \ldots$$

Soient

$$y1, y2, \ldots a'_{\alpha 1_1 \ldots}, b'_{\beta 1_1 \ldots}, \ldots$$

(*) J. Deruyts, *Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. XVI). — *Sur quelques propriétés des transformations linéaires* (Ibid.).

des systèmes d'éléments semblables à

$$x1, x2, \dots a_{\alpha 1_1 \dots}, b_{\beta 1_1 \dots}, \dots$$

et non compris dans la fonction φ. Prenons

$$\varphi'_1 = \left[y1 \frac{d\varphi}{dx1}\right]^{\varepsilon 1} \cdot \left[y2 \frac{d\varphi}{dx2}\right]^{\varepsilon 2} \dots \left[a' \frac{d\varphi}{da}\right]^{\varepsilon' 1} \cdot \left[b' \frac{d\varphi}{db}\right]^{\varepsilon' 2} \dots;$$

la transformée de φ'_1 est

$$\Phi'_1 = \left[Y1 \frac{d\Phi}{dX1}\right]^{\varepsilon 1} \cdot \left[Y2 \frac{d\Phi}{dX2}\right]^{\varepsilon 2} \dots \left[A' \frac{d\Phi}{dA}\right]^{\varepsilon' 1} \cdot \left[B' \frac{d\Phi}{dB}\right]^{\varepsilon' 2} \dots$$

D'après les relations

$$\Phi = \delta^{\pi} \cdot \varphi, \quad Y \frac{d}{dX} = y \frac{d}{dx}, \quad A' \frac{d}{dA} = a' \frac{d}{da}, \dots$$

(§ 4), la transformée Φ'_1 diffère seulement de φ'_1 par une puissance de δ; donc φ'_1 est une fonction invariante.

Cela posé, le système des quantités linéairement indépendantes p ne diffère pas du système des dérivées

$$p' = \frac{d^{\dots} \varphi'}{dy1_1^{\varepsilon 1_1} \dots dy2_1^{\varepsilon 2_1} \dots da'^{\varepsilon' 1_1}_{\alpha 1_1 \dots} \dots db'^{\varepsilon' 2_1}_{\beta 1_1 \dots} \dots},$$

quand on donne à φ' la valeur particulière φ'_1. D'après le théorème énoncé ci-dessus, les quantités p sont cogrédientes des dérivées p' rapportées à une fonction invariante φ' quelconque : à part la notation, c'est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir.

11. Deux systèmes transformables $(p_1, p_2, \dots p_r)$ et $(q_1, q_2, \dots q_r)$ sont *contragrédients*, si l'on a en même temps que les équations (1) (§ 9), les relations

$$\begin{aligned}
\delta^{\varepsilon} Q_1 &= \theta_{11} q_1 + \theta_{21} q_2 + \dots + \theta_{r1} q_r, \\
\delta^{\varepsilon} Q_2 &= \theta_{12} q_1 + \theta_{22} q_2 + \dots + \theta_{r2} q_r, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta^{\varepsilon} Q_r &= \theta_{1r} q_1 + \theta_{2r} q_2 + \dots + \theta_{rr} q_r,
\end{aligned}$$

ε désignant un nombre entier, positif, nul ou négatif.

Il est visible que deux systèmes, contragrédients à un même troisième, sont cogrédients entre eux.

Exemples. — 1° D'après les équations de la substitution linéaire des variables, on a :

$$\frac{dg}{dX_i} = \alpha_{1i}\frac{dg}{dx_1} + \alpha_{2i}\frac{dg}{dx_2} + \cdots + \alpha_{ni}\frac{dg}{dx_n}, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Quand g est une fonction invariante φ, on a : $g = \varphi = \delta^{-\pi}\Phi$, puis :

$$\delta^{-\pi}\frac{d\Phi}{dX_1} = \alpha_{11}\frac{d\varphi}{dx_1} + \alpha_{21}\frac{d\varphi}{dx_2} + \cdots + \alpha_{n1}\frac{d\varphi}{dx_n},$$

$$\delta^{-\pi}\frac{d\Phi}{dX_2} = \alpha_{12}\frac{d\varphi}{dx_1} + \alpha_{22}\frac{d\varphi}{dx_2} + \cdots + \alpha_{n2}\frac{d\varphi}{dx_n},$$

. . . .

$$\delta^{-\pi}\frac{d\Phi}{dX_n} = \alpha_{1n}\frac{d\varphi}{dx_1} + \alpha_{2n}\frac{d\varphi}{dx_2} + \cdots + \alpha_{nn}\frac{d\varphi}{dx_n}.$$

Il en résulte que *les variables* x et *les dérivées* $\frac{d\varphi}{dx}$ *d'une fonction invariante forment deux systèmes contragrédients* (*).

2° Supposons que les quantités p sont les coefficients d'une forme f; nous aurons $p = a_{\alpha 1_1 \ldots}$, $P = A_{\alpha 1_1 \ldots}$, puis des équations linéaires

$$a_{\alpha 1_1 \ldots} = \sum \theta \; A_{\alpha' 1_1 \ldots}.$$

On déduit de là :

$$\frac{dg}{dA_{\alpha' 1_1 \ldots}} = \sum \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}} \cdot \theta.$$

Si l'on prend $g = \varphi$, on a $g = \delta^{-\pi}\Phi$, puis :

$$\delta^{-\pi}\frac{d\Phi}{dA_{\alpha' 1_1 \ldots}} = \sum \theta \frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}};$$

par conséquent, *les coefficients* $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ *et les dérivées* $\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ *d'une fonction invariante sont des quantités contragrédientes.*

(*) Voir Salmon, *Algèbre supérieure*, trad. par Bazin, p. 98.

Formation des fonctions invariantes au moyen de deux systèmes contragrédients.

12. Nous représenterons une fonction invariante φ par la formule

$$\varphi = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r, \qquad (2)$$

en faisant les conventions suivantes : 1° $p_1, p_2, \dots p_r$ sont des fonctions de certains éléments e ; 2° $q_1, q_2, \dots q_r$ sont des fonctions d'autres éléments e' ; 3° la somme $p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r$ ne peut pas être remplacée par une somme analogue, comprenant un nombre moindre de termes. Ainsi, les quantités $p_1, p_2, \dots p_r$ sont linéairement indépendantes, et il en est de même de $q_1, q_2, \dots q_r$.

D'après l'équation de définition $\Phi = \delta^{\pi}\varphi$, nous aurons :

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \cdots + P_r Q_r = \delta^{\pi}(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r). \qquad (3)$$

Remplaçons dans $Q_1, Q_2, \dots Q_r$ les éléments transformés E' par leurs valeurs exprimées au moyen des éléments primitifs e'. En identifiant dans les deux membres de l'équation (3) les multiplicateurs des différents produits d'éléments e', on obtiendra des équations linéaires $L = 0$, entre $p_1, p_2, \dots p_r$ et $P_1, P_2, \dots P_r$. Admettons, pour un instant, que l'on ne puisse pas résoudre ces équations par rapport à $p_1, p_2, \dots p_r$; d'après la formule (3), la quantité

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r,$$

c'est-à-dire φ, serait la somme de $r - r'$ $(r' > 0)$ fonctions des éléments e' multipliées par des combinaisons de $p_1, p_2, \dots p_r$, ces combinaisons étant linéaires et à coefficients numériques. On pourrait ainsi réduire à $r - r'$ le nombre des fonctions d'éléments e qui servent à exprimer φ [formule (2)]; cette réduction est contraire aux conventions établies ci-dessus. On peut donc exprimer $p_1, p_2, \dots p_r$ en fonctions linéaires de $P_1, P_2, \dots P_r$; de même, $q_1, q_2, \dots q_r$ s'expriment linéairement au moyen de $Q_1, Q_2, \dots Q_r$, et réciproquement.

Supposons que l'on ait les équations

$$p_i = \theta_{i1} P_1 + \theta_{i2} P_2 + \cdots + \theta_{ir} P_r,$$

$$Q_i = \theta'_{i1} q_1 + \theta'_{i2} q_2 + \cdots + \theta'_{ir} q_r,$$

dans lesquelles les lettres θ, θ' désignent des fonctions des paramètres α_{ij}. D'après la formule (3), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{r} P_i q_j \theta'_{ij} = \delta^{\pi} . \sum_{i,j=1}^{r} P_i q_j \theta_{ji},$$

puis

$$\theta'_{ij} = \delta^{\pi} . \theta_{ji};$$

il résulte de là que les systèmes $(p_1, p_2, \ldots p_r)$, $(q_1, q_2, \ldots q_r)$ sont contragrédients.

Inversement, on vérifie que si les quantités $(p_1, p_2, \ldots p_r)$ et $(q_1, q_2, \ldots q_r)$ sont contragrédientes, la fonction

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r$$

est invariante.

Ainsi, *toute fonction invariante est la somme des produits des termes correspondants de deux systèmes contragrédients, et réciproquement.*

Applications. — I. Les coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ d'une forme f, et, par suite, les coefficients $a'_{\alpha 1 \ldots}$ d'une forme semblable, sont contragrédients aux dérivées $\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ d'une fonction invariante φ quelconque (§ 11); par conséquent, la polaire $\sum a'_{\alpha 1_1 \ldots} \cdot \frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ est invariante.

De même, les variables x, et des variables semblables y, sont contragrédientes aux dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$; la polaire $y\frac{d\varphi}{dx}$ est invariante.

D'après ces résultats, *les polaires quelconques d'une fonction invariante sont invariantes.* (Voir aussi § 4.)

Soient f', f'', ... des formes semblables à f; si on remplace les coefficients de f par les coefficients de $f + \varepsilon' f' + \varepsilon'' f'' + \cdots$, les multiplicateurs des produits de ε', ε'', ... dans la fonction φ modifiée sont des polaires invariantes. On obtient un résultat analogue en remplaçant les variables x par $x + \varepsilon' y + \cdots$ (*).

II. Soient φ, φ' deux fonctions invariantes exprimables par

$$\varphi = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r,$$
$$\varphi' = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_r q'_r,$$

dans les conditions indiquées pour la formule (2). Les quantités (q), (q') sont contragrédientes aux mêmes quantités (p); par suite, *les systèmes* $(q_1, q_2, \ldots q_r)$ *et* $(q'_1, q'_2, \ldots q'_r)$ *sont cogrédients entre eux.*

Remarque. — D'après ce qui précède, toute fonction invariante permet de déterminer des systèmes contragrédients.

Considérons, par exemple, le produit de polaires

$$\left[y \frac{d}{dx} \varphi\right]^h \cdots \times \left[a' \frac{d}{da} \varphi\right]^k \cdots$$

dans lequel $y, \ldots a', \ldots$ désignent des variables et des coefficients qui ne sont pas compris dans la fonction invariante quelconque φ. Les produits

$$y_1^{h_1} y_2^{h_2} \ldots y_n^{h_n} \ldots a'^{k_1}_{\alpha 1_1 \ldots} a'^{k_2}_{\alpha' 1_1 \ldots} \cdots$$

et

$$\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{k_1} \cdots \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)^{h_1} \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)^{h_2} \cdots \left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}\right)^{k_1} \left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha' 1_1 \ldots}}\right)^{k_2} \cdots$$

sont contragrédients, si l'on prend

$$\varepsilon_{h_1} = \binom{h}{h_1, h_2 \ldots}, \ldots \varepsilon_{k_1} = \binom{k}{k_1, k_2, \ldots}, \ldots$$

Il résulte de là (§ 10) que les produits

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots a^{k_1}_{\alpha 1_1 \ldots} a^{k_2}_{\alpha' 1_1 \ldots} \cdots$$

sont contragrédients des dérivées

$$\varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{k_1} \cdots \frac{d^{h + \ldots + k + \cdots} \varphi}{dx_1^{h_1} dx_2^{h_2} \ldots da^{k_1}_{\alpha 1_1 \ldots} \cdots}.$$

(*) Cette propriété des polaires est due à Aronhold. (*Journal de Crelle*, t. LXII, p. 312.)

Transmutation des fonctions invariantes (*).

13. La considération des systèmes cogrédients permet d'obtenir, d'une manière simple, des fonctions invariantes au moyen de fonctions invariantes déjà connues. Supposons que la fonction invariante φ est exprimable, et *d'une seule manière*, comme fonction entière et homogène des systèmes de quantités transformables $(p1)$, $(p2)$, ...; nous écrirons $\varphi = \varphi(p1, p2, ...)$, puis

$$\varphi(\mathrm{P}1, \mathrm{P}2, ...) = \delta^{\pi} . \varphi(p1, p2, ...). \qquad (4)$$

Dans les conditions actuelles, l'équation (4) doit se vérifier *identiquement*, d'après les relations linéaires qui existent entre les quantités $(p1)$, $(p2)$, ... et leurs transformées $(\mathrm{P}1)$, $(\mathrm{P}2)$, ...

Soient $(p'1)$, $(p'2)$, ... des systèmes cogrédients à $(p1)$, $(p2)$, ... ; abstraction faite de puissances du module δ, il existe entre les quantités

$$(p'1),\ (p'2),\ ...\ (\mathrm{P}'1),\ (\mathrm{P}'2),\ ...$$

les mêmes relations qu'entre

$$(p1),\ (p2),\ ...\ (\mathrm{P}1),\ (\mathrm{P}2),\ ...$$

D'après ces relations, on pourra vérifier l'équation

$$\varphi(\mathrm{P}'1, \mathrm{P}'2, ...) = \delta^{\pi'} . \varphi(p'1, p'2, ...),$$

qui est tout à fait analogue à (4), et dans laquelle π' est un exposant différent ou non de π. Conséquemment :

Si une fonction invariante φ est exprimable, et d'une seule

(*) J. Deruyts, *Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes*. — *Sur quelques propriétés des transformations linéaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, t. XVI). — *Sur la loi de formation des fonctions invariantes* (Mém. des Sav. Étr. publiés par l'Acad. roy. de Belgique, t. LI, in-4°, p. 7).

manière, comme fonction entière des quantités (p1), (p2), ..., *on n'altère pas la propriété d'invariance en remplaçant dans* φ *les quantités* (p1), (p2), ... *par des quantités cogrédientes* (p′1), (p′2),...

Ce théorème excessivement simple donne comme applications un grand nombre de procédés de transmutation des fonctions invariantes. Nous indiquerons les résultats principaux auxquels on est conduit dans cette voie.

14. Une fonction invariante φ n'est exprimable que d'une seule manière au moyen des coefficients $a_{\alpha 1_1 \dots \alpha\mu_n}$; ces coefficients sont cogrédients des dérivées $\frac{d^{\cdots}\varphi_1}{dx1_1^{\alpha 1_1} \dots dx\mu_n^{\alpha\mu_n}}$ (§ 10) : d'après le théorème précédent, *on n'altère pas la propriété d'invariance en remplaçant dans* φ *les coefficients* $\mathrm{a}_{\alpha 1_1 \dots}$, $\mathrm{b}_{\beta 1_1 \dots}$, ... *d'une ou plusieurs formes* f, f_1 ... *par les dérivées*

$$\frac{d^{\cdots}\varphi_1}{dx1_1^{\alpha 1_1} \dots dx\mu^{\alpha\mu_n}}, \quad \frac{d^{\cdot\cdot}\varphi_2}{dx1_1^{\beta 1_1} \dots dx\nu_n^{\beta\nu_n}}, \dots$$

de fonctions invariantes φ_1, φ_2 ...

Applications. — I. Si φ_1, φ_2, ... contiennent les mêmes variables que f_1, f_2, ... et aux mêmes degrés, on obtient cette propriété : *les fonctions invariantes de fonctions invariantes, considérées comme formes algébriques, sont des fonctions invariantes proprement dites* (*).

Cas particulier. — Si φ_1, φ_2, ... sont des mêmes degrés que f, par rapport aux variables, on obtient des fonctions invariantes en remplaçant dans φ les coefficients de f par les coefficients de $\varepsilon'\varphi_1 + \varepsilon''\varphi_2 + \dots$, et en considérant dans le résultat les multiplicateurs des puissances de $\varepsilon', \varepsilon''$, ... (Voir § 12, 1re applic.)

II. D'après la proposition énoncée plus haut, *on déduit d'une fonction invariante* φ *une fonction analogue, en remplaçant les coefficients d'une ou plusieurs formes linéaires par les dérivées de* φ_1, φ_2, ... *par rapport aux variables.*

(*) Aronhold, *Journal de Crelle,* t. LXII, p. 335.

Cas particuliers. — 1° Prenons pour φ, une forme linéaire

$$\xi_y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \cdots + \xi_n y_n$$

rapportée à des variables y différentes de x; nous retrouvons la polaire invariante $y\frac{d}{dx}\varphi_1$ (§ 12).

2° Le déterminant $(\pm\, \xi 1_1 \xi 2_2 \ldots \xi n_n)$ de n formes linéaires $\xi 1_x, \xi 2_x, \ldots \xi n_x$ est un invariant; on en déduit la fonction invariante

$$\left(\pm\, \frac{d\varphi_1}{dx1_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx2_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dxn_n}\right);$$

on pourra encore réduire les symboles $\frac{d}{dx1}, \frac{d}{dx2} \cdots \frac{d}{dx_n}$ à un ou plusieurs d'entre eux.

15. Toute fonction s'exprime d'une seule manière au moyen des variables $x1, x2, \ldots$; ces variables sont cogrédientes aux dérivées $\frac{d\varphi_1}{d\xi 1}, \frac{d\varphi_2}{d\xi_2}, \ldots$ relatives aux coefficients de formes linéaires (§ 10, 1re applic.).

Par conséquent, *on n'altère pas la propriété d'invariance en remplaçant dans φ une ou plusieurs séries de variables par les dérivées premières de fonctions invariantes, relativement aux coefficients de formes linéaires distinctes ou non.*

Application. — Supposons que la fonction invariante φ contient les seules séries de variables $x1, x2, \ldots xt$; considérons t séries de n formes linéaires

$$\xi 1_x^{(i)},\ \xi 2_x^{(i)}, \ldots \xi n_x^{(i)},\ (i = 1, 2, \ldots t),$$

dont les coefficients ne sont pas contenus dans φ; les déterminants $\varphi_i = (\pm\, \xi 1_1^{(i)}, \xi 2_2^{(i)} \ldots \xi n_n^{(i)})$ sont invariants. Nous déduirons de φ un invariant φ_0, en remplaçant les variables xi_j par

$$\frac{d\varphi_i}{d\xi 1_j^{(i)}},\qquad (i = 1, 2, \ldots t;\ j = 1, 2, \ldots n).$$

Ainsi, *toute fonction invariante φ peut être ramenée à un invariant φ_0, par l'adjonction de formes linéaires* (*).

(*) Clebsch, *Journal de Crelle*, t LIX, p. 4.

Il convient d'observer que l'invariant φ_0 est assujetti à certaines conditions relatives aux coefficients de

$$\xi 2_x^{(i)}, \ldots \xi n_x^{(i)};$$

d'autre part, il n'est pas simple d'obtenir l'expression de φ, au moyen d'un développement quelconque de φ_0.

16. Supposons que la fonction invariante φ contient, parmi d'autres, les séries de variables $x1$, $x2$, ... $x\mu$ et respectivement aux degrés $\alpha 1$, $\alpha 2$, ... $\alpha\mu$; ainsi, l'expression de φ est linéaire par rapport aux produits

$$p = x1_1^{\alpha 1_1} x1_2^{\alpha 1_2} \ldots x1_n^{\alpha 1_n} \ldots x\mu_1^{\alpha\mu_1} \ldots x\mu_u^{\alpha\mu_n},$$

pour lesquels on a :

$$\alpha 1_1 + \alpha 1_2 + \cdots + \alpha 1_n = \alpha 1, \ldots, \alpha\mu_1 + \alpha\mu_2 + \cdots + \alpha\mu_n = \alpha\mu$$

Désignons, comme précédemment, par $a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}$ les coefficients d'une forme f de degrés $\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu$ pour les variables $x1, \ldots x\mu$; les produits p sont cogrédients des dérivées $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ (§ 10, applic. I). Par suite, *on n'altère pas la propriété d'invariance en remplaçant dans φ les produits* p *par les dérivées correspondantes* $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ *d'une fonction invariante* φ_1.

Application. — Si l'on prend pour φ une forme semblable à f,

$$\varphi = f' = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a'_{\alpha 1_1 \ldots} x1_1^{\alpha 1_1} \ldots x\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

on obtient la polaire invariante $\sum a'_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ (§ 12).

17. Les produits de dérivées premières de fonctions invariantes quelconques φ_1, φ_2, ... sont cogrédients des dérivées multiples correspondantes de φ_1 (§ 10, applic. II). D'après le théorème général énoncé au paragraphe 13, *la propriété d'invariance n'est pas altérée quand on remplace, dans une fonction invariante, les produits de dérivées premières de* φ_1, φ_2, ... *par les dérivées multiples de* φ_1.

Application. — La puissance $\varepsilon^{\text{ième}}$ du déterminant

$$\varphi = \left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx1_1} \frac{d\varphi_2}{dx2_2} \cdots \frac{d\varphi_n}{dxn_n}\right)$$

est une fonction invariante (§ 14) : on en déduira une fonction analogue en remplaçant dans φ^ε les produits de dérivées premières de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ par les dérivées $\varepsilon^{\text{ièmes}}$ correspondantes de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Il en est de même quand on considère, au lieu de φ^ε, la $\varepsilon^{\text{ième}}$ puissance du déterminant

$$\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx1_1} \frac{d\varphi_2}{dx1_2} \cdots \frac{d\varphi_n}{dx1_n}\right);$$

la fonction invariante que l'on obtient dans ce dernier cas est la $\varepsilon^{\text{ième}}$ *transvection* (Ueberschiebung) de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ (*).

On déduit encore de φ^ε, la fonction invariante

$$\left(\pm \frac{d}{dx1_1} \frac{d}{dx2_2} \cdots \frac{d}{dxn_n}\right)^\varepsilon \varphi_1 \text{ (**)}.$$

18. Pour la substitution linéaire la plus générale, les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ et les coefficients $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ d'une forme linéaire ξ_x se transforment suivant les équations

$$x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n,$$

$$\Xi_i = \alpha_{1i}\xi_1 + \alpha_{2i}\xi_2 + \cdots + \alpha_{ni}\xi_n; \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

la dernière formule peut être remplacée par

$$\Xi_{n-i+1} = \alpha_{n,n-i+1}\xi_n + \alpha_{n-1,n-i+1}\xi_{n-1} + \cdots + \alpha_{1,n-i+1}\xi_1.$$

D'après la comparaison des valeurs de x_i et de Ξ_{n-i+1}, on voit qu'il existe des relations analogues entre les systèmes de quantités

$$(\alpha_{h,k}, X_i, x_i) \quad \text{et} \quad (\alpha_{n-k+1,n-h+1}, \xi_{n-i+1}, \Xi_{n-i+1}).$$

(*) Voir pour le cas de $n = 2$: Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* p. 99; Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie,* t. II, p. 33.

(**) Voir Cayley, *Journal de Crelle,* t. XXX.

Prenons, pour abréger,

$$\xi 1_1^{\alpha 1_1} \dots = \xi 1_1^{\alpha 1_1} \xi 1_2^{\alpha 1_2} \dots \xi 1_n^{\alpha 1_n} \dots \xi \mu_1^{\alpha \mu_1} \dots \xi \mu_n^{\alpha \mu_n},$$

$$x 1_1^{\alpha 1_n} \dots = x 1_1^{\alpha 1_n} x 1_2^{\alpha 1_{n-1}} \dots x 1_n^{\alpha 1_1} \dots x \mu_1^{\alpha \mu_n} \dots x \mu_n^{\alpha \mu_1};$$

il existera les mêmes relations entre les quantités

$$\left(\alpha_{h,k},\ \Xi_1^{\alpha 1_1} \dots,\ \xi_1^{\alpha 1_1 \dots}\right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha_{n-k+1, n-h+1},\ x 1_1^{\alpha 1_n} \dots,\ X 1_1^{\alpha 1_n} \dots\right).$$

Les produits $\xi 1_1{}^{\alpha 1_1} \dots$ sont cogrédients des coefficients $a_{\alpha 1_1 \dots}$ d'une forme aux variables $x1, x2, \dots x\mu$ et des mêmes ordres que le produit $x 1_1{}^{\alpha 1_n} \dots$ D'autre part, si l'on pose

$$a_{\alpha 1_n \dots} = a_{\alpha 1_n \alpha 1_{n-1} \dots \alpha 1_2 \alpha 1_1,\ \alpha 2_n \dots \alpha 2_1,\ \dots \alpha \mu_1},$$

les produits $x 1_1{}^{\alpha 1_n} \dots$ sont cogrédients des dérivées $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \dots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \dots}}$ d'une fonction invariante φ_1 (§ 10).

D'après ces considérations, on peut énoncer la propriété suivante :

Abstraction faite du changement de α_{hk} en $\alpha_{n-k+1,\ n-h+1}$, il existe entre

$$X_i,\ A_{\alpha 1_1 \dots} \quad \text{et} \quad x_i,\ a_{\alpha 1_1 \dots}$$

les mêmes relations qu'entre des quantités cogrédientes à ξ_{n-i+1}, $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \dots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \dots}}$ et les transformées de ces quantités.

19. Pour une fonction invariante

$$\varphi = \varphi(x_i,\ a_{\alpha 1_1 \dots},\ b_{\beta 1_1 \dots},\ \text{etc.}),$$

l'équation

$$\varphi(X_i,\ A_{\alpha 1_1 \dots},\ B_{\beta 1_1 \dots}\ \text{etc.} \dots) = \delta^{\pi} \cdot \varphi(x_i,\ a_{\alpha 1_1 \dots},\ b_{\beta 1_1 \dots}\ \text{etc.} \dots)$$

se vérifie identiquement au moyen des relations qui ont lieu entre les éléments

$$X_i,\ A_{\alpha 1_1 \dots},\ B_{\beta 1_1 \dots}\ \text{etc.} \dots \quad \text{et} \quad x_i,\ a_{\alpha 1_1 \dots},\ b_{\beta 1_1 \dots}\ \text{etc.} \dots$$

D'après la propriété indiquée ci-dessus, on déduira de la dernière formule une nouvelle égalité en remplaçant : 1° α_{hk} par $\alpha_{n-k+1,\,n-h+1}$; 2° X_i, x_i par ξ_{n-i+1}, Ξ_{n-i+1}; 3° $A_{\alpha 1_1 \ldots}$, $B_{\beta 1_1 \ldots}$, etc., $a_{\alpha 1_1 \ldots}$, $b_{\beta 1_1 \ldots}$, etc., par les dérivées

$$\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \ldots}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_2}{db_{\beta 1_n \ldots}}, \quad \text{etc.} \ldots,$$

$$\frac{\delta^{\varepsilon_1}}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}} \frac{d\Phi_1}{dA_{\alpha 1_n \ldots}}, \quad \frac{\delta^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_{\beta 1_n \ldots}} \frac{d\Phi_2}{dB_{\beta 1_n \ldots}}, \quad \text{etc.} \ldots,$$

φ_1, φ_2, ... étant des fonctions invariantes pour lesquelles on a

$$\Phi_1 = \delta^{-\varepsilon_1} \varphi_1, \; \Phi_2 = \delta^{-\varepsilon_2} \varphi_2, \ldots$$

On obtient ainsi une équation analogue à

$$\varphi\left(\xi_{n-i+1}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \ldots}}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_2}{db_{\beta 1_n \ldots}} \ldots\right)$$

$$= \delta^{\pi'} . \varphi\left(\Xi_{n-i+1}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}} \frac{d\Phi_1}{dA_{\alpha 1_n \ldots}}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \ldots}} \frac{d\Phi_2}{dB_{\beta 1_n \ldots}}, \ldots\right)$$

Conséquemment, *si* $\varphi(x_i, a_{\alpha 1_1 \ldots}, b_{\beta 1_1 \ldots}$, etc.) *est une fonction invariante, il en est de même de*

$$\varphi' = \varphi\left(\xi_{n-i+1}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \ldots}}, \; \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \ldots}} \frac{d\varphi_2}{db_{\beta 1_n \ldots}}, \ldots\right) \; (*).$$

Applications. — I. On peut, sans altérer la propriété d'inva-

(*) MM. Cayley et Sylvester ont obtenu ce théorème dans le cas particulier de $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots$ (Voir *Philosophical Transactions*, vol. 144, 1854; *Journal de Crelle*, t. LXXXV). La méthode de M. Sylvester est basée sur une propriété des *formes préparées*, dont M. Le Paige a donné une élégante démonstration aux *Mathematische Annalen* (t. XV). La propriété des formes préparées dont il s'agit se trouve généralisée dans notre travail : *Sur quelques propriétés*, etc. (loc. cit.).

riance, remplacer dans φ' les coefficients ξ de formes linéaires par les dérivées premières de fonctions invariantes φ_1', φ_2', ... relatives aux variables (§ 14). On peut de même remplacer dans le résultat obtenu les produits de dérivées de φ_1', φ_2', ... φ_1, φ_2, ... par les dérivées multiples correspondantes de φ_1 (§ 17). Il en résulte que *l'opération*

$$\varphi\left(\frac{d}{dx_{n-i+1}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \dots}} \frac{d}{da_{\alpha 1_n \dots}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \dots}} \frac{d}{db_{\beta 1_n \dots}}, \text{ etc.} \dots\right),$$

appliquée à une fonction invariante φ_1, *donne comme résultat une fonction invariante.*

II. En supposant

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}\left(x_i, \; a_{\alpha 1_1 \dots}, \; b_{\beta 1_1 \dots}, \text{ etc.} \dots\right),$$

nous représenterons par $\omega\mathcal{F}$ la quantité

$$\mathcal{F}\left(\xi_{n-i+1}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \dots}} \frac{d\varphi_1}{da_{\alpha 1_n \dots}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\beta 1_n \dots}} \frac{d\varphi_2}{db_{\beta 1_n \dots}}, \text{ etc.} \dots\right).$$

Désignons par $a'_{\alpha 1_1 \dots}$, des coefficients semblables à $a_{\alpha 1_1 \dots}$ et appliquons le théorème général à la polaire

$$\varphi = \sum a'_{\alpha 1_1 \dots} \frac{d\varphi_0}{da_{\alpha 1_1 \dots}}$$

d'une fonction invariante φ_0 indépendante des éléments $a'_{\alpha 1_1 \dots}$; nous obtiendrons

$$\varphi' = \sum \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \dots}} \frac{d\varphi_1'}{da'_{\alpha 1_n \dots}} \omega\left(\frac{d\varphi_0}{da_{\alpha 1_1 \dots}}\right).$$

Soient $y1$, $y2$, ..., des séries de variables qui ne sont pas contenues dans les fonctions $\omega\left(\frac{d\varphi_0}{da_{\alpha 1_1 \dots}}\right)$; si l'on prend :

$$\varphi_1' = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \dots} a'_{\alpha 1_1 \dots} y1_1^{\alpha 1_1} y1_2^{\alpha 1_2} . y2_1^{\alpha 2_1} \dots,$$

on a :

$$\varphi' = \sum y1_1^{\alpha 1_n} y1_2^{\alpha 1_{n-1}} \ldots y2_1^{\alpha 2_n} \ldots \omega\left(\frac{d\varphi_0}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}\right).$$

Les quantités $y1_1^{\alpha 1_n}\ y1_2^{\alpha 1_{n-1}} \ldots$ constituent un système transformable; d'un autre côté, les fonctions invariantes φ_1' et φ_1 s'expriment comme somme des produits $y1_1^{\alpha 1_n}\ y1_2^{\alpha 1_{n-1}} \ldots$ multipliés par des quantités

$$\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}\ a'_{\alpha 1_n \ldots} \quad \text{et} \quad \omega\left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}\right),$$

indépendantes des variables y. Dans ces conditions, les systèmes de quantités

$$\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}\ a'_{\alpha 1_n \ldots} \quad \text{et} \quad \omega\left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}\right)$$

sont cogrédients (voir § 12). Par suite du principe de transmutation, *on déduit d'une fonction invariante une fonction analogue, en remplaçant les coefficients* $\mathrm{a}_{\alpha 1_1 \ldots}$ *par les quantités*

$$\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_n \ldots}}\ \omega\left(\frac{d\varphi}{da_{\alpha 1_n \ldots}}\right).$$

Il est visible que l'on peut introduire simultanément des modifications analogues pour d'autres séries de coefficients; en outre, l'opérateur ω peut varier d'une série de coefficients à l'autre.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

Fonctions isobariques. — Substitutions S_h.

20. Soit

$$\mathfrak{P} = \Pi a_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_n \ldots \alpha\mu_n} \Pi' x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n},$$

un produit de coefficients et de variables de différentes séries. Nous appellerons *poids* de $\mathfrak{P}$ *pour l'indice* i, le nombre

$$\pi_i = \sum (\alpha 1_i + \alpha 2_i + \cdots + \alpha\mu_i) - \sum' r_i; \qquad (1)$$

dans cette valeur de π_i, la première sommation se rapporte à tous les coefficients dont le produit $\mathfrak{P}$ dépend ; la seconde sommation est relative à toutes les séries de variables.

D'après les expressions de $\mathfrak{P}$ et de π_i, on a

$$\sum (\alpha 1_i + \alpha 2_i + \cdots + \alpha\mu_i) a_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{d\mathfrak{P}}{da_{\alpha 1_1 \ldots}} - \sum' x_i \frac{d\mathfrak{P}}{dx_i} = \pi_i \mathfrak{P}. \qquad (2)$$

Une fonction g est dite *isobarique,* quand elle est une somme de produits $\mathfrak{P}$, des mêmes poids $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ pour les indices $1, 2, \ldots n$; les nombres $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ sont alors les poids de g, et l'on a par la formule (2)

$$\sum (\alpha 1_i + \alpha 2_i + \cdots + \alpha\mu_i) a_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}} - \sum' x_i \frac{dg}{dx_i} = \pi_i \cdot g. \qquad (3)$$

D'après la définition du poids, *un produit de fonctions isobariques a pour poids la somme des poids correspondants des facteurs.*

La fonction homogène g ne diffère de $\Sigma a_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ que par un facteur numérique; son poids, pour l'indice i, est la somme des poids de $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ et de $\frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$.

Si l'on désigne par $a'_{\alpha 1_1 \ldots}$, etc., des coefficients semblables à $a_{\alpha 1_1 \ldots}$, etc., la fonction $\Sigma a_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ et la polaire $\Sigma a'_{\alpha 1_1 \ldots} \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}$ ont les mêmes poids. Par suite, les polaires de g relatives aux coefficients sont des mêmes poids que g.

Plus généralement, *les polaires quelconques d'une fonction isobarique* g *sont isobariques et des mêmes poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$.

21. Nous désignerons par S_h, la substitution linéaire définie par les équations

$$x_h = \varepsilon X_h, \qquad x_k = X_k \left(k \gtrless h\right), \tag{4}$$

ε étant une constante arbitraire. Pour cette substitution particulière, on a

$$A_h = \varepsilon a_h, \qquad A_k = a_k, \tag{5}$$

comme transformées des coefficients $a_1, a_2, \ldots a_n$ d'une forme linéaire.

Soit

$$a1_1^{\alpha 1_1} a1_2^{\alpha 1_2} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} \ldots a\mu_1^{\alpha\mu_1} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

l'expression symbolique d'un coefficient $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ d'une forme quelconque; la transformée $A_{\alpha 1_1 \ldots}$ sera représentée par

$$A1_1^{\alpha 1_1} A1_2^{\alpha 1_2} \ldots A1_n^{\alpha 1_n} \ldots A\mu_1^{\alpha\mu_1} \ldots A\mu_n^{\alpha\mu_n},$$

c'est-à-dire par

$$a1_1^{\alpha 1_1} a1_2^{\alpha 1_2} \ldots a\mu_n^{\alpha\mu_n} \times \varepsilon^{\alpha 1_h + \alpha 2_h + \cdots + \alpha\mu_h},$$

ainsi qu'il résulte des équations (5).

En passant des expressions symboliques aux expressions effectives, on trouve :

$$A_{\alpha 1_1 \ldots} = \varepsilon^{\alpha 1_h + \alpha 2_h + \ldots + \alpha\mu_h} a_{\alpha 1_1 \ldots}.$$

D'après cette formule et d'après les équations (4), la transformée d'un produit $\mathfrak{P}$, par la substitution S_h, est égale à $\mathfrak{P} . \varepsilon^{\pi_h}$ [voir formule (1)]. Semblablement, *une fonction isobarique* g, *de poids* $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$, *se reproduit multipliée par* ε^{π_h} *quand on effectue la substitution* S_h, $(h = 1, 2, \dots n)$.

Réciproquement, *une fonction* g *est isobarique et de poids* $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$, *quand sa transformée par la substitution* S_h *est égale à* $g . \varepsilon^{\pi_h}$, *pour* $h = 1, 2, \dots n$. Cette propriété se déduit immédiatement de l'énoncé précédent, si l'on observe que toute fonction est une somme de fonctions isobariques.

L'expression symbolique normale g_{1s} de g a pour transformée G_{1s}, l'expression symbolique normale de G (§ 7). En rapportant les transformées à la substitution S_h, nous écrirons :

$$G = \varepsilon^{\pi_h} g, \qquad G_{1s} = \varepsilon^{\pi_h} g_{1s} + R_s, \tag{6}$$

R_s désignant un certain reste. Les fonctions G_{1s}, g_{1s} étant des expressions symboliques normales, sont symétriques par rapport aux systèmes de symboles équivalents; d'après sa valeur, la fonction R_s jouit de la même propriété; R_s est ainsi une expression symbolique normale. D'après la première des équations (6), on a $R_s \equiv 0$; on doit donc avoir $R_s = 0$ (§ 7), et par suite $G_{1s} = \varepsilon^{\pi_h} g_{1s}$. Il résulte de là que *l'expression symbolique normale* g_{1s}, *d'une fonction isobarique* g, *est isobarique et des mêmes poids.*

Réciproquement, *si une expression symbolique quelconque* g_s *est isobarique et de poids* $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$, *il en est de même de la fonction effective* g. En effet, si pour la substitution S_h on a $G_s = \varepsilon^{\pi_h} g_s$, on a aussi $G = \varepsilon^{\pi_h} g$.

Remarque. — Pour une fonction symbolique g_s de poids $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$, on a :

$$\sum_a a_i \frac{dg_s}{da_i} - \sum' x_i \frac{dg_s}{dx_i} = \pi_i g_s; \tag{7}$$

la première sommation doit se rapporter à tous les coefficients symboliques; la seconde, à toutes les séries de variables. La formule (7) résulte de l'équation (3), moyennant le changement de notation introduit par les coefficients de formes linéaires (§ 1).

Opérateurs (h, l). — Substitutions $S_{h,l}$.

22. Nous définirons des opérateurs (h, l) par l'équation

$$(h, l)g = -\sum x_h \frac{dg}{dx_l} + \sum \frac{dg}{da_{\alpha 1_1 \alpha 1_2 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_n \ldots \alpha\mu_1 \ldots \alpha\mu_n}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \alpha 1_h \cdot a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_h - 1, \ldots \alpha 1_l + 1, \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_n ; \ldots \alpha\mu_1 \ldots \alpha\mu_n} \\ + \alpha 2_h \cdot a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_h - 1, \ldots \alpha 2_l + 1, \ldots \alpha 2_n ; \ldots \alpha\mu_1 \ldots \alpha\mu_n} + \ldots \\ + \alpha\mu_h \cdot a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_n ; \ldots \alpha\mu_1 \ldots \alpha\mu_h - 1, \ldots \alpha\mu_l + 1 \ldots \alpha\mu_n ;} \end{array} \right.$$

la première sommation se rapporte à toutes les séries de variables; la seconde est relative à tous les coefficients; la fonction g est supposée quelconque; les nombres h, l sont distincts et compris dans la suite $1, 2, \ldots n$.

On peut écrire

$$(h, l)g = \sum \frac{dg}{de} \cdot (h, l)e, \tag{8}$$

en désignant par e un élément quelconque (une variable ou un coefficient). Les éléments e peuvent être des quantités analogues à

$$e' = a_{\alpha 1_1 \ldots}, \qquad e'' = x_l, \qquad e''' = x_h, \qquad e^{\text{IV}} = x_k, \; (k \gtrless h, l).$$

On a :

$$(h, l)e' = \alpha 1_h a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_h - 1, \ldots \alpha 1_l + 1 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots} + \alpha 2_h a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_n ; \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_h - 1, \ldots \alpha 2_l + 1 \ldots \alpha 2_n ; \ldots} + \text{etc.},$$

$$(h, l)e'' = -x_h, \qquad (h, l)e''' = 0, \qquad (h, l)e^{\text{IV}} = 0.$$

Les quantités e', e'' ont, pour les indices h et l, les poids

$$\alpha 1_h + \alpha 2_h + \cdots + \alpha\mu_h \quad \text{et} \quad \alpha 1_l + \alpha 2_l + \cdots + \alpha\mu_l ; \quad 0 \text{ et } -1 ;$$

les quantités

$$(h, l)\, e' \quad \text{et} \quad (h, l)\, e''$$

ont, relativement aux mêmes indices, les poids

$$\alpha 1_h + \alpha 2_h + \cdots + \alpha\mu_h - 1 \quad \text{et} \quad \alpha 1_l + \alpha 2_l + \cdots + \alpha\mu_l + 1;$$

$$-1 \quad \text{et} \quad 0.$$

A cause des relations

$$(h, l)\, e''' = 0, \quad (h, l)\, e^{\text{IV}} = 0,$$

on voit que *l'opération* (h, l), *appliquée à un élément* e, *diminue d'une unité le poids pour l'indice* h *et augmente d'autant le poids pour l'indice* l.

D'après la formule (8), on obtient $(h, l) g$ en remplaçant dans g, de toutes les manières possibles, *un* élément e par $(h, l) e$ et en faisant la somme de tous les résultats. Par suite, *si* g *est une fonction isobarique de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$, *la quantité* (h, l) g *est isobarique et de poids* $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_h - 1, \ldots \pi_l + 1 \ldots \pi_n$.

L'opération (h, l) est une combinaison linéaire de dérivées du premier ordre; en l'appliquant au produit de deux fonctions g, g_1, on obtient :

$$(h, l)\, g g_1 = g \cdot (h, l)\, g_1 + (h, l)\, g \cdot g_1 .$$

On a de même, par la formule de Leibnitz :

$$(h, l)^m g g_1 = g \cdot (h, l)^m g_1 + \frac{m}{1} (h, l)\, g \cdot (h, l)^{m-1} g_1 + \cdots + (h, l)^m g \cdot g_1; \quad (9)$$

$(h, l)^m$ représente alors l'opération (h, l) appliquée m fois de suite.

Remarque. — Une expression symbolique quelconque g_s est, par définition, une fonction des variables et des coefficients de formes linéaires tels que $a_1, a_2, \ldots a_n$. D'après la formule (8), on a :

$$(h, l)\, g_s = -\sum x_h \frac{dg_s}{dx_l} + \sum a_l \frac{dg_s}{da_h} \cdot \quad (10)$$

23. Nous désignerons par $S_{h,l}$ la substitution pour laquelle on a :

$$x_l = X_l + \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless l),$$

ε étant une constante quelconque. Nous pouvons écrire :

$$X = x + \frac{\varepsilon}{1}(h,\, l)\, x + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h,\, l)^2 x + \cdots;$$

en effet, pour $x = x_l$, on a :

$$(h,\, l)\, x = -\, x_h, \quad (h,\, l)^2 x = 0, \quad \text{etc.} \ldots;$$

pour $x = x_k$, on a :

$$(h,\, l)\, x = 0, \quad (h,\, l)^2 x = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est ce qui concorde avec les formules

$$X_l = x_l - \varepsilon x_h, \quad X_k = x_k (k \gtrless l).$$

Recherchons actuellement la transformée d'un coefficient quelconque

$$a_{\alpha 1_1 \ldots} \equiv a1_1^{\alpha 1_1} a1_2^{\alpha 1_2} \ldots a\mu_n^{\alpha \mu_n}.$$

Quand on effectue la substitution $S_{h,\, l}$, les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_h \ldots a_n$ d'une forme linéaire ont pour transformées

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad \ldots A_h = a_h + \varepsilon a_l, \quad \ldots A_n = a_n;$$

on a, par suite :

$$\begin{aligned}
A_{\alpha 1_1 \ldots} &\equiv a1_1^{\alpha 1_1} \ldots (a1_h + \varepsilon a1_l)^{\alpha 1_h} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots (a2_h + \varepsilon a2_l)^{\alpha 2_h} \ldots a2_n^{\alpha 2_n} \ldots \\
&\equiv a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots a2_n^{\alpha 2_n} \ldots \\
&+ \frac{\varepsilon}{1} \{ \alpha 1_h a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a1_h^{\alpha 1_h - 1} \ldots a1_l^{\alpha 1_l + 1} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots a2_n^{\alpha 2_n} \ldots \\
&+ \alpha 2_h a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots a2_h^{\alpha 2_h - 1} \ldots a2_l^{\alpha 2_l + 1} \ldots a2_n^{\alpha 2_n} \ldots + \cdots \} \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{1.2} \{ \alpha 1_h (\alpha 1_h - 1) a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a1_h^{\alpha 1_h - 2} \ldots a1_l^{\alpha 1_l + 1} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} \ldots + \cdots \} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions symboliques par les expressions effectives, on trouve :

$$\begin{aligned}
A_{\alpha 1_1 \ldots} = a_{\alpha 1_1 \ldots} &+ \frac{\varepsilon}{1}(h,\, l)\, a_{\alpha 1_1 \ldots} + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h,\, l)^2 a_{\alpha 1_1 \ldots} \\
&+ \frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3}(h,\, l)^3 a_{\alpha 1_1 \ldots} + \cdots
\end{aligned}$$

D'après les valeurs des variables X et des coefficients $A_{\alpha 1_1 \ldots}$, tout élément e a pour transformée :

$$e + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,e + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,e + \frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3}(h, l)^3\,e + \cdots$$

Soit e', un élément quelconque, différent ou non de e; la transformée du produit ee', pour la substitution $S_{h,l}$, sera :

$$\left\{ e + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,e + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,e + \cdots \right\}$$

$$\times \left\{ e' + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,e' + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,e' + \cdots \right\},$$

c'est-à-dire

$$ee' + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,ee' + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,ee' + \cdots,$$

ainsi qu'il résulte de la formule (9). De la même manière, un produit $\mathfrak{P}$ d'éléments e a pour transformée :

$$\mathfrak{P} + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,\mathfrak{P} + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,\mathfrak{P} + \cdots$$

En conséquence, *la transformée d'une fonction quelconque* g, *par la substitution* $S_{h,l}$, *est*

$$g + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,g + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,g + \frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3}(h, l)^3\,g + \cdots$$

On déduit de là cette propriété importante : *Pour qu'une fonction* g *soit égale à sa transformée par la substitution* $S_{h,l}$, *il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'équation aux dérivées partielles* (h, l) g = 0.

Soit g_s une expression symbolique de la fonction g; la transformée de g_s, dans les conditions actuelles, est

$$g_s + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,g_s + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,g_s + \cdots;$$

elle représente symboliquement la transformée de g (§ 5); d'après cette remarque, on a

$$(h, l)\, g \equiv (h, l)\, g_s. \tag{11}$$

Si g_{1s} est l'expression symbolique normale de g, la transformée G_{1s} est l'expression symbolique normale de G (§ 7). Conséquemment, on a en expression symbolique normale :

$$(h, l)\, g \equiv (h, l)\, g_{1s}. \tag{11'}$$

24. Formules auxiliaires. — Prenons pour g une fonction isobarique de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$, et désignons par $(h_1, l_1)(h, l)\, g$ la quantité obtenue en appliquant l'opération (h_1, l_1) à $(h, l)\, g$. Nous établirons les formules

$$\left.\begin{aligned} (h, l)(l, l_1)\, g - (l, l_1)(h, l)\, g &= -(h, l_1)\, g, \\ (h, l)(l, h)\, g - (l, h)(h, l)\, g &= (\pi_l - \pi_h)\, g, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

h, l, l_1 étant des nombres distincts compris dans la suite 1, 2, ... n.

L'expression symbolique normale de g est une fonction isobarique g_{1s}, des mêmes poids que g (§ 21); on a en outre :

$$(h_1, l_1)(h, l)\, g \equiv (h_1, l_1)(h, l)\, g_{1s},$$

d'après la formule (11'). Par suite, il nous suffira d'établir les relations (12), en y remplaçant g par g_{1s}.

Dans les conditions actuelles, l'opérateur (h, l) doit être rapporté à une expression symbolique; nous ferons donc usage de la formule (10) :

$$(h, l) = \sum_a a_l \frac{d}{da_h} - \sum_x x_h \frac{d}{dx_l}.$$

Nous représenterons par x' et par a', des séries de variables et de coefficients symboliques différents ou non de x et de a; en outre, nous conviendrons de rapporter toutes les dérivées à la fonction g_{1s}.

1° On a :

$$(h, l)(l, l_1) = (h\, l) \sum a_{l_1} \frac{d}{da_l} - (h, l) \sum x_l \frac{d}{dx_{l_1}}$$

$$= \sum\sum a_{l_1} a'_l \frac{d^2}{da_l da'_h} - \sum\sum a_{l_1} x_h \frac{d^2}{da_l dx_l} - \sum\sum x_l a_l \frac{d^2}{dx_{l_1} da_h}$$

$$+ \sum\sum x_l x'_h \frac{d^2}{dx_{l_1} dx'_l} + \sum x_h \frac{d}{dx_{l_1}};$$

et de même :

$$(l, l_1)(h, l) = \sum\sum a_l a'_{l_1} \frac{d^2}{da_h da'_l} - \sum\sum a_l x_l \frac{d^2}{da_h dx_{l_1}}$$

$$- \sum\sum a_{l_1} x_h \frac{d^2}{da_l dx_l} + \sum\sum x_h x'_l \frac{d^2}{dx_l dx'_{l_1}} + \sum a_{l_1} \frac{d}{da_h}.$$

On obtient ensuite :

$$(h,l)(l,l_1)g_{1s} - (l,l_1)(h,l)g_{1s} = -\sum a_{l_1} \frac{dg_{1s}}{da_h} + \sum x_h \frac{dg_{1s}}{dx_{l_1}} = -(h, l_1)g_{1s},$$

ce qui vérifie la première formule (12).

2° On trouve :

$$(h,l)(l,h) = \sum a_l \frac{d}{da_l} + \sum x_h \frac{d}{dx_h} + \sum\sum a_h a'_l \frac{d^2}{da_l da'_h} - \sum\sum a_h x_h \frac{d^2}{da_l dx_l}$$

$$- \sum\sum x_l a_l \frac{d^2}{dx_h da_h} + \sum\sum x_l x'_h \frac{d^2}{dx_h dx'_l};$$

$$(l,h)(h,l) = \sum a_h \frac{d}{da_h} + \sum x_l \frac{d}{dx_l} + \sum\sum a_l a'_h \frac{d^2}{da_h da'_l} - \sum\sum a_h x_h \frac{d^2}{da_l da_l}$$

$$- \sum\sum x_l a_l \frac{d^2}{dx_h da_h} + \sum\sum x'_l x_h \frac{d^2}{dx_l dx'_h}.$$

Par conséquent, on a :

$$(h, l)(l, h) - (l, h)(h, l) = \left(\sum a_l \frac{d}{da_l} - \sum x_l \frac{d}{dx_l}\right)$$

$$- \left(\sum a_h \frac{d}{da_h} - \sum x_h \frac{d}{dx_h}\right).$$

Cette équation doit être rapportée à la fonction symbolique g_{1s}; dans le second membre, la première parenthèse est égale à $\pi_l \cdot g_{1s}$; la deuxième a pour valeur $\pi_h \cdot g_{1s}$ [voir formule (7)]. On a donc :

$$(h, l)(l, h)\, g_{1s} - (l, h)(h, l)\, g_{1s} = (\pi_l - \pi_h) \cdot g_{1s};$$

c'est ce qui établit la seconde formule (12).

25. Théorème. — *Si une fonction* g *est solution des équations*

$$(i + 1, i)\, g = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n - 1,$$

l'équation

$$(h, l)\, g = 0$$

a lieu pour toutes les valeurs de h *supérieures à* l.

On a à déduire des équations

$$(i + 1, i)\, g = 0$$

les formules

$$(i + j, i)\, g = 0,$$

en supposant

$$i + j \overline{\overline{<}}\, n.$$

L'égalité

$$(i + j, i)\, g = 0$$

est vérifiée par hypothèse, dans le cas de $j = 1$; il suffit donc d'établir la formule

$$(i + j, i)\, g = 0,$$

en supposant

$$(i + j - 1, i)\, g = 0, \quad j \overline{\overline{>}}\, 2.$$

Appliquons la première formule (12) au cas de

$$h = i + j, \qquad l = i + 1, \qquad l_1 = i;$$

nous obtenons :

$$(i + j,\ i + 1)(i + 1, i) g - (i + 1, i)(i + j,\ i + 1) g = -(i + j, i)\, g.$$

Par supposition,

$$(i + 1, i)\, g = 0, \qquad (i + j,\ i + 1)\, g = 0;$$

nous avons donc

$$(i + j, i)\, g = 0:$$

c'est le résultat que nous voulions établir.

Au moyen de considérations analogues, on obtient cette autre propriété : *Si l'on a* $(i, i + 1)\, g = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots n - 1$, *la fonction* g *satisfait à l'équation*

$$(h, l)\, g = 0,$$

pour toutes les valeurs de h *inférieures à* l, ($l = 2, 3, \ldots n$).

26. Théorème. — *Si une fonction isobarique* g *de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ *satisfait à l'équation*

$$(h, l)\; g = 0,$$

on a

$$\pi_l - \pi_h \geqq 0\ (*).$$

Admettons pour un instant que l'on puisse avoir

$$(h, l)\, g = 0 \qquad \text{et} \qquad \pi_l - \pi_h = -\zeta^2,$$

ζ étant une quantité réelle différente de zéro. D'après la deuxième formule (12), nous aurons :

$$(h, l)\,(l, h)\, g - (l, h)\,(h, l)\, g = -\zeta^2 \,.\, g,$$

c'est-à-dire

$$(h, l)\,(l, h)\, g = -\zeta^2\, g; \tag{13}$$

par suite, la fonction $g' = (l, h)\, g$ est différente de zéro et satisfait à l'équation

$$(h, l)\, g' = -\zeta^2\, g. \tag{14}$$

En remplaçant g par g', on obtient :

$$(h, l)\,(l, h)\, g' - (l, h)\,(h, l)\, g' = (\pi'_l - \pi'_h) \,.\, g', \tag{15}$$

(*) Voir, pour le cas de $n = 2$, les Mémoires de MM. Cayley et Sylvester (*Philosophical Transactions* et *Journal de Crelle*, t. LXXXV).

si l'on désigne par $\pi'_1, \pi'_2, \ldots \pi'_n$ les poids de la fonction isobarique $g' = (l, h)\, g$.

Les nombres π'_l et π'_h ont pour valeurs $\pi_l - 1$, $\pi_h + 1$ (§ 22); on a donc

$$\pi'_l - \pi'_h = \pi_l - \pi_h - 2 = -\zeta^2 - 2.$$

D'après la formule (14),

$$(l, h)\,(h, l)\, g' = -\zeta^2\,(l, h)\, g = -\zeta^2 g'.$$

Par conséquent on déduit de l'équation (15) :

$$(h, l)\,(l, h)\, g' = -2\,(\zeta^2 + 1)\, g';$$

si donc on prend

$$g'' = (l, h)\, g' = (l, h)^2\, g,$$

la fonction g'' est différente de zéro.

Les considérations précédentes peuvent être appliquées pour g'', de la même manière que pour g et g'; en continuant ainsi de suite, on obtiendrait une suite illimitée de fonctions

$$g,\ (l, h)\, g,\ (l, h)^2\, g,\ \ldots (l, h)^m\, g, \ldots$$

toutes différentes de zéro; ces fonctions ont pour l'indice l les poids

$$\pi_l,\ \pi_l - 1,\ \pi_l - 2,\ \ldots\ \pi_l - m, \ldots$$

Or, si g contient les différentes séries de variables $x1$, $x2$, ... au degré *total* $\Sigma\rho$, il en est de même des fonctions $(h, l)^m g$; par suite, le poids de $(h, l)^m g$ pour l'indice l peut être représenté par

$$-\sum \rho + \zeta_m,$$

ζ_m étant un nombre positif ou nul. Cette valeur du poids ne peut pas être égale à $\pi_l - m$ pour toutes les valeurs $m = 1, 2, 3 \ldots$ Conséquemment nous avons introduit une supposition inadmissible, en écrivant

$$\pi_l - \pi_h = -\zeta^2;$$

on doit donc avoir la relation

$$\pi_l - \pi_h \geqq 0.$$

27. Théorème. — *Si une fonction isobarique* g *a les mêmes poids pour les indices* h, l, *et si elle satisfait à l'équation* (h, l) g = 0, *elle satisfait aussi à l'équation* (l, h) g = 0.

Si l'on suppose $\zeta = 0$, c'est-à-dire $\pi_l - \pi_h = 0$, on obtient par l'équation (13) :

$$(h, l)\,(l, h)\,g = 0.$$

D'après le théorème précédent, les poids π'_h, π'_l de la fonction $g' = (l, h)\,g$, supposée différente de zéro, vérifient la relation

$$\pi'_l - \pi'_h \gtreqq 0;$$

on devrait donc avoir

$$\pi_l - \pi_h - 2 \gtreqq 0,$$

c'est ce qui est impossible dans le cas actuel; on a, par suite,

$$g' = (l, h)\,g = 0.$$

Réduction des substitutions linéaires.

28. La substitution linéaire S la plus générale est définie par les équations :

$$x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Nous voulons établir que *toute substitution* S *peut être obtenue en effectuant successivement les substitutions particulières*

$$S_h, S_{hl}, \qquad (h, l = 1, 2, \ldots n).$$

La réduction annoncée se vérifie facilement pour le cas de $n = 2$. En effet, si l'on effectue successivement les substitutions S_1, S_{12}, S_{21}, S_2 définies par

$$x_1 = \varepsilon X'_1,\ x_2 = X'_2; \qquad X'_1 = X''_1,\ X'_2 = X''_2 + \varepsilon_{12}X''_1;$$

$$X''_1 = X'''_1 + \varepsilon_{21}X'''_2,\ X''_2 = X'''_2; \qquad X'''_1 = X_1,\ X'''_2 = \varepsilon_2 X\ ,$$

on obtient :

$$x_1 = \varepsilon X_1 + \varepsilon\varepsilon_{21}\varepsilon_2 X_2,$$

$$x_2 = \varepsilon_{12} X_1 + \varepsilon_2 (1 + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}) X_2,$$

ce que l'on peut écrire :

$$x_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2,$$

$$x_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2,$$

les lettres α désignant des constantes quelconques.

Pour établir la réduction analogue dans le cas général, nous pourrons donc la supposer exacte pour les substitutions de $n - 1$ variables. Ainsi, la substitution linéaire définie par

$$\left.\begin{aligned} x_j &= \alpha_{j1} X'_1 + \alpha_{j2} X'_2 + \cdots + \alpha_{j,n-1} X'_{n-1}, \\ x_n &= X'_n, \quad (j = 1, 2, \ldots n - 1), \end{aligned}\right\} \qquad (S')$$

résulte des substitutions

$$S_{h_1}, S_{h_1 l_1}, \quad (h_1, l_1 = 1, 2, \ldots n - 1).$$

En prenant

$$X'_j = X''_j, \quad X'_n = X''_n + \alpha_{n1} X''_1, \qquad (S_{1n})$$

$$X''_j = X'''_j, \quad X''_n = X'''_n + \alpha_{n2} X'''_2, \qquad (S_{2n})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_j^{(n-1)} = x_j^0, \quad X_n^{(n-1)} = x_n^0 + \alpha_{n,n-1} x_{n-1}^0, \qquad (S_{n-1.n})$$

nous obtenons :

$$x_j = \alpha_{j1} x_1^0 + \alpha_{j2} x_2^0 + \cdots + \alpha_{j,n-1} x_{n-1}^0,$$

$$x_n = \alpha_{n1} x_1^0 + \alpha_{n2} x_2^0 + \cdots + \alpha_{n,n-1} x_{n-1}^0 + x_n^0.$$

Effectuons en outre les substitutions $S_{n,1}, S_{n2}, \ldots, S_{n,n-1}, S_n$, définies par les équations

$$x_1^0 = x'_1 + \varepsilon_1 x'_n, \qquad x_i^0 = x'_i, \qquad i > 1;$$

$$x'_1 = x''_2 + \varepsilon_2 x''_n, \qquad x'_i = x''_i, \qquad i \gtrless 2;$$

$$x_{n-1}^{(n-2)} = x_{n-1}^{(n-1)} + \varepsilon_{n-1} x_n^{(n-1)}, \qquad x_i^{(n-2)} = x_i^{(n-1)}, \qquad i \gtrless n - 1;$$

$$x_n^{(n-1)} = \varepsilon_n X_n, \qquad x_i^{(n-1)} = X_i, \qquad i < n;$$

nous aurons :

$$\left.\begin{array}{c} x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n, \\ i = 1, 2, .. \; n, \end{array}\right\} \qquad (S'')$$

en prenant

$$\alpha_{jn} = \varepsilon_1\alpha_{j1} + \varepsilon_2\alpha_{j2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}\alpha_{j.n-1}, \quad (j = 1, 2, \ldots n - 1),$$

$$\alpha_{n,n} = \varepsilon_1\alpha_{n1} + \varepsilon_2\alpha_{n2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}\alpha_{n,n-1} + \varepsilon_n.$$

On peut déterminer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ de telle manière que $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots \alpha_{n-1,n}$ aient des valeurs quelconques, car le déterminant $(\pm \alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n-1,n-1})$ étant le module de S′, ne peut pas être nul. De plus, le paramètre α_{nn} peut être supposé quelconque, parce que ε_n est une constante arbitraire. Dans ces conditions, S″ est la substitution linéaire la plus générale S; nous l'avons obtenue en combinant les substitutions

$$S', S_{jn}, S_{nj} \quad \text{et} \quad S_n.$$

Comme nous l'avons admis, S′ résulte des substitutions

$$S_{h_1}, S_{h_1 l_1}, \quad (h_1, l_1 = 1, 2, \ldots n - 1);$$

conséquemment, S est réductible à

$$S_h, S_{hl}, \quad (h, l = 1, 2, \ldots n).$$

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS INVARIANTES ET DES FONCTIONS SEMI-INVARIANTES.

Propriétés caractéristiques des fonctions invariantes.

29. Les fonctions invariantes φ ont été définies par leur propriété de satisfaire à l'équation

$$\Phi = \delta^{\pi} \cdot \varphi, \tag{1}$$

relative à la substitution linéaire S la plus générale. La substitution S résulte des substitutions particulières

$$S_h,\ S_{hl},\ h, l = 1, 2, \dots n;$$

conséquemment, on peut remplacer la formule (1) par les équations qui en résultent quand on réduit S à S_h, S_{hl}.

Pour la substitution S_h, on a :

$$x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless h), \quad \delta = \varepsilon,$$

puis

$$\Phi = \varepsilon^{\pi} \cdot \varphi. \tag{2}$$

Pour la substitution S_{hl}, on a :

$$x_l = X_l + \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k\,(k \gtrless l), \quad \delta = 1,$$

$$\Phi = \varphi. \tag{3}$$

Ainsi les équations (2) et (3), rapportées à

$$S_h \quad \text{et} \quad S_{hl}(h, l = 1, 2, \dots n),$$

suffisent pour caractériser les fonctions invariantes φ. D'après la formule (2), φ est une fonction isobarique, de même poids π pour tous les indices (§ 21) ; l'équation (3), relative à $S_{h,l}$, est équivalente à la condition $(h, l)\varphi = 0$ (voir § 23). Par suite, une fonction φ est invariante quand elle est isobarique et de même poids π pour tous les indices $1, 2, \ldots n$ et quand elle satisfait aux équations

$$(h, l)\,\varphi = 0, \quad h, l = 1, 2 \ldots n \text{ (*)}.$$

Ces conditions sont surabondantes; en effet, les formules $(h, l)\,\varphi = 0$, pour $h < l$, sont réductibles aux formules $(h, l)\,\varphi = 0$, où l'on a $h > l$, parce que la fonction φ a le même poids pour tous les indices; d'autre part, les équations $(h, l)\,\varphi = 0$, pour $h > l$, se déduisent des équations

$$(i + 1, i)\,\varphi = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n - 1),$$

(voir §§ 25 et 27). Nous obtenons ainsi ce théorème : *Pour qu'une fonction φ soit invariante, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux équations* $(\mathrm{i} + 1, \mathrm{i})\,\varphi = 0$ *et qu'elle soit isobarique et de même poids pour tous les indices.*

30. Comme application, on peut établir la proposition suivante :

Une fonction g *des éléments est invariante quand elle se reproduit à part une constante, après une substitution linéaire quelconque* S.

Conformément à l'énoncé, nous écrirons :

$$G = \theta \cdot g,$$

θ étant une fonction des paramètres de la substitution S. Nous pouvons toujours écrire g comme somme $g' + g'' + \ldots$ de fonctions isobariques ; nous désignerons par $\pi'_i, \pi''_i, \ldots$ les poids de g', g'', pour l'indice i.

(*) Les équations aux dérivées partielles des fonctions invariantes ont été obtenues par M. Cayley (*Philosophical Transactions*, 1854; *Journal de Crelle*, t. XLVII).

En réduisant S à la substitution particulière

$$x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless h),$$

on a :

$$G = \varepsilon^{\pi' h} g' + \varepsilon^{\pi'' h} g'' + \cdots,$$

et, d'après l'énoncé,

$$G = \theta_1 . g = \theta_1 (g' + g'' + \cdots).$$

Il résulte de là que g est une fonction isobarique.

Si l'on effectue la substitution

$$x_l = X_l + \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless l),$$

on a :

$$G = g + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\, g + \frac{\varepsilon^2}{1 . 2}(h, l)^2 g + \cdots,$$

et, d'après l'énoncé,

$$G = \theta_2 . g.$$

En identifiant les deux valeurs de G, on obtient

$$0 = (\theta_2 - 1)\, g + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\, g + \frac{\varepsilon^2}{1 . 2}(h, l)^2 g + \cdots;$$

dans cette équation, les différents termes n'ont pas les mêmes poids pour les indices h, l. On doit donc avoir :

$$(h, l)\, g = 0, \quad h, l = 1, 2, \ldots n.$$

A cause des relations

$$(h, l)\, g = 0, \quad (l, h)\, g = 0,$$

la fonction isobarique g a le même poids par rapport aux indices h, l (§ 26). Conséquemment, g est une fonction isobarique, de même poids pour tous les indices, et solution des équations $(h, l)\, g = 0$; en d'autres termes, g est une fonction invariante (*).

(*) Voir les démonstrations différentes publiées par Clebsch (*Theorie der binären Formen*, p. 306); Gram (*Math. Annalen*, t. VII); Capelli (*Mem. dei Lincei*, 1882, p. 582).

31. Reprenons l'équation caractéristique

$$\Phi = \delta^{\pi} . \varphi ;$$

comme nous l'avons vu, φ a le poids π par rapport à tous les indices; pour cette raison, on dit que π est le *poids de la fonction invariante* φ.

Soient

$$\rho 1, \ \rho 2, \ \ldots ; \ r 1, \ r 2, \ \ldots$$

les degrés de φ par rapport aux séries de variables, $x1$, $x2$, ..., et aux coefficients de formes algébriques telles que

$$f = \sum \varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots} a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n} x1_1^{\alpha 1_1} \ldots x\mu_n^{\alpha\mu_n} ;$$

nous supposerons

$$\alpha 1_1 + \alpha 1_2 + \cdots + \alpha 1_n = \alpha 1, \quad \alpha 2_1 + \cdots + \alpha 2_n = \alpha 2,$$

$$\ldots, \ \alpha\mu_1 + \alpha\mu_2 + \cdots + \alpha\mu_n = \alpha\mu .$$

La fonction φ est une somme de produits analogues à

$$\mathfrak{P} = \Pi a_{\alpha 1_1 \ldots} \Pi x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \ldots x_n^{\rho_n} ;$$

les poids de $\mathfrak{P}$ pour les indices 1, 2, ..., n sont égaux au poids π de φ; on a donc :

$$\pi = \sum (\alpha 1_1 + \alpha 2_1 + \cdots + \alpha\mu_1) - \sum \rho_1 ,$$

$$\pi = \sum (\alpha 1_2 + \alpha 2_2 + \cdots + \alpha\mu_2) - \sum \rho_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi = \sum (\alpha 1_n + \alpha 2_n + \cdots + \alpha\mu_n) - \sum \rho_n ;$$

en ajoutant membre à membre ces équations, on obtient :

$$\pi = \frac{\sum_1 (\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha\mu) r - \sum \rho}{n} ;$$

dans cette formule, la somme Σ_1 se rapporte à toutes les formes, telles que f, dont dépend la fonction invariante φ.

Fonctions semi-invariantes (*).

32. Soit ψ une fonction isobarique des variables et des coefficients de formes algébriques (**) ; nous dirons que ψ est une *fonction semi-invariante,* si l'on a

$$(i+1, i)\,\psi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n-1.$$

En particulier, nous appellerons *semi-invariant,* une fonction semi-invariante indépendante des variables.

D'après ce qui précède (§ 29), *une fonction invariante est une fonction semi-invariante de même poids pour tous les indices* 1, 2, ..., n.

Exemples. — Si l'on désigne par

$$\xi 1_x, \ \xi 2_x, \ \ldots \ \xi i_x$$

des formes linéaires telles que

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi 1_1 & \xi 1_2 & \ldots & \xi 1_i \\ \xi 2_1 & \xi 2_2 & \ldots & \xi 2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi i_1 & \xi i_2 & \ldots & \xi i_i \end{vmatrix}$$

est un semi-invariant ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Le déterminant des variables

$$\begin{vmatrix} x1_n & x1_{n-1} & \ldots & x1_{n-i+1} \\ x2_n & x2_{n-1} & \ldots & x2_{n-i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ xi_n & xi_{n-1} & \ldots & xi_{n-i+1} \end{vmatrix}$$

est de même une fonction semi-invariante.

(*) J. Deruyts, *Sur la généralisation des semi-invariants* (Mém. couronnés et Mém. des Sav. Étr. publiés par l'Acad. de Belgique, t. LI, in-4°); *Sur les fonctions semi-invariantes* (Bull. de l'Acad. de Belgique, 3e sér., t. XIX).

(**) D'après nos conventions, on doit entendre par *fonction,* une fonction algébrique entière et homogène des différentes séries de coefficients et de variables.

Il est visible que toute somme de produits de fonctions semi-invariantes est une fonction analogue, si elle est homogène par rapport aux différentes séries d'éléments.

33. Pour la suite, il est nécessaire de considérer les nouvelles fonctions que nous venons d'introduire ; nous établirons tout d'abord une propriété qui justifie leur dénomination.

D'après la définition, la quantité ψ n'est pas modifiée par les substitutions $S_{i+1,\,i}$; il en résulte, d'après un théorème établi précédemment (§ 25), que la fonction ψ n'est pas modifiée par les substitutions $S_{h,\,l}$, où l'on a $h > l$. D'un autre côté, si ψ a les poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, ψ se reproduit multiplié par ε^{π_h} après la substitution S_h, définie par

$$x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless h).$$

D'après ces considérations, on a :

$$\Psi = \psi \,.\, \alpha_{11}^{\pi_1} \alpha_{22}^{\pi_2} \ldots \alpha_{nn}^{\pi_n}, \tag{4}$$

en rapportant la transformée Ψ à la substitution

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \cdots + \alpha_{1n}X_n, \\ x_2 = \qquad\qquad \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 + \cdots + \alpha_{2n}X_n, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{33}X_3 + \cdots + \alpha_{3n}X_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}X_n \end{array}\right\} \qquad (S_{\frac{1}{2}})$$

Pour vérifier l'équation (4), on observera que la substitution $S_{\frac{1}{2}}$ s'obtient en effectuant successivement des substitutions

$$S_h, S_{h,l}, \quad h > l, \quad h, l = 1, 2, \ldots n.$$

Ainsi, *une fonction semi-invariante, de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, *se reproduit multipliée par*

$$\alpha_{11}^{\pi_1} \alpha_{22}^{\pi_2} \ldots \alpha_{nn}^{\pi_n}$$

après la substitution $S_{\frac{1}{2}}$.

On peut encore établir la proposition suivante : *une fonction* ψ *est semi-invariante, quand sa transformée pour la substitution* $S_{\frac{1}{2}}$ *ne diffère de* ψ *que par un facteur.*

Il est d'abord visible que ψ est une fonction isobarique ; de plus, si l'on réduit la substitution $S_{\frac{1}{2}}$ à $S_{i+1,i}$, on a :

$$x_i = X_i + \varepsilon X_{i+1}, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless i),$$

$$\Psi = \psi + \frac{\varepsilon}{1}(i+1, i)\psi + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2}(i+1, i)^2\psi + \cdots$$

D'après l'énoncé, Ψ doit être le produit de ψ par une quantité dépendant de ε; les différents termes de l'expression indiquée pour Ψ, ont des poids différents par rapport aux indices i, $i+1$: on doit donc avoir $(i+1, i)\psi = 0$. En conséquence, ψ est une fonction semi-invariante.

Remarque. — Nous avons vu que si une fonction isobarique satisfait à l'équation $(h, l) = 0$, la différence des poids pour l'indice l et pour l'indice h ne peut pas être négative.

La fonction ψ est solution des équations $(i+1, i) = 0$; par conséquent, *si* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *sont les poids d'une fonction semi-invariante, on a*

$$\pi_1 - \pi_2 \geqq 0, \quad \pi_2 - \pi_3 \geqq 0, \quad \ldots \; \pi_i - \pi_{i+1} \geqq 0, \quad \ldots \; \pi_{n-1} - \pi_n \geqq 0.$$

34. Soit (e), un groupe d'éléments comprenant certaines séries de variables et de coefficients ; nous désignerons par les lettres g, des fonctions qui dépendent seulement des éléments du groupe (e); nous représenterons par les lettres g', des quantités indépendantes de ces mêmes éléments.

Écrivons une fonction semi-invariante sous la forme

$$\psi = g_1 g'_1 + g_2 g'_2 + \cdots + g_r g'_r;$$

chacune des quantités g, g' est nécessairement isobarique, et l'on peut supposer que le nombre r des termes est le plus petit possible : ainsi, il n'existe aucune relation linéaire entre $g_1, g_2, \ldots, g_r$.

Soient $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ les poids d'une des fonctions g; nous dirons que cette fonction g est un *terme principal* de ψ par rapport au groupe (e), s'il n'existe dans la suite $g_1, g_2, \ldots, g_r$ aucun terme de poids

$$\pi'_n, \; \pi'_{n-1}, \ldots \pi'_{j+1}, \; \pi'_j + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0),$$

pour les indices $n, n-1, \ldots, j+1, j$, $(j \overline{\overline{>}} 2)$.

D'après les formules $(i+1, i)\,\psi = 0$, nous obtenons

$$\begin{gathered} g_1 (i+1, i)\, g'_1 + g_2 (i+1, i)\, g'_2 + \cdots + g_r (i+1, i)\, g'_r \\ + g'_1 (i+1, i)\, g_1 + g'_2 (i+1, i)\, g_2 + \cdots + g'_r (i+1, i)\, g_r = 0, \end{gathered}$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ces relations se partagent en équations isobariques par rapport aux éléments du groupe (e). Supposons que g_1 est un terme principal de ψ et considérons les termes de poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ pour (e). L'opération $(i+1, i)$ diminue d'une unité le poids relatif à l'indice $i+1$; il en résulte, d'après la définition du terme principal de poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$, que l'on doit égaler à zéro la partie de l'expression

$$g_1 (i+1, i)\, g'_1 + g_2 (i+1, i)\, g'_2 + \cdots + g_r (i+1, i)\, g'_r,$$

qui est de poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ par rapport au groupe (e). D'un autre côté, les quantités $g_1, g_2, \ldots, g_r$ ont été supposées linéairement indépendantes ; par suite, on doit avoir

$$(i+1, i)\, g'_1 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n-1.$$

Ainsi, *on déduit d'une fonction semi-invariante* ψ, *une fonction analogue* g'_1, *en considérant le multiplicateur d'un terme principal* g_1 *par rapport à un groupe quelconque d'éléments* (e).

Si l'on prend successivement pour (e) des groupes d'éléments comprenant toutes les séries de variables, *on déduit d'une fonction semi-invariante* ψ, *des semi-invariants.*

Expressions symboliques des fonctions invariantes et des fonctions semi-invariantes.

35. Soit ψ_{1s} l'expression symbolique normale d'une fonction semi-invariante ψ ; on aura :

$$0 = (i + 1, i)\,\psi \equiv (i + 1, i)\,\psi_{1s}.$$

La quantité $(i + 1, i)\,\psi_{1s}$ est, en même temps que ψ_{1s}, une expression symbolique normale (§ 23); d'après cette remarque, on a (§ 7) :

$$(i + 1, i)\,\psi_{1s} = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n - 1$$

Du reste, ψ_{1s} est une fonction isobarique des mêmes poids que ψ et relative à des formes linéaires ; donc, *une fonction semi-invariante a pour expression symbolique normale une fonction semi-invariante des mêmes poids, relative à des formes linéaires.*

En particulier, *l'expression symbolique normale d'une fonction invariante est une fonction invariante de même poids, relative à des formes linéaires.*

Soit g_s une expression symbolique quelconque qui est une fonction semi-invariante de formes linéaires ; d'après les relations

$$(i + 1, i)\,g_s = 0$$

la quantité g, représentée symboliquement par g_s, satisfait aux équations

$$(i + 1, i)\,g = 0 ;$$

d'autre part, g est isobarique et des mêmes poids que g_s (§ 21). Conséquemment, *toute quantité* g, *représentée symboliquement par une fonction semi-invariante* g_s, *est une fonction semi-invariante de mêmes poids.*

En particulier, *si une expression symbolique est invariante, il en est de même de la fonction effective.*

36. Les quantités symboliques sont des fonctions des coefficients de formes du premier degré seulement; par conséquent, pour obtenir l'expression des fonctions semi-invariantes symboliques, nous aurons à rechercher l'expression effective des fonctions semi-invariantes ψ' de formes du premier degré.

Désignons par ψ'', une fonction linéaire par rapport à des séries de variables et à des séries de coefficients de formes du premier degré : il existe toujours une fonction ψ'', réductible à ψ' quand on identifie certaines séries d'éléments. Pour déterminer complètement la quantité ψ'', nous l'assujettirons à la condition d'être symétrique par rapport aux séries d'éléments qui doivent être identifiées entre elles. La transformée Ψ'' de la fonction ψ'' ainsi déterminée, est évidemment symétrique par rapport aux mêmes éléments.

Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les poids de la fonction semi-invariante ψ'; nous aurons, pour la substitution $S_{\frac{1}{2}}$,

$$\Psi' = \alpha_{11}^{\pi_1} \alpha_{22}^{\pi_2} \ldots \alpha_{nn}^{\pi_n} \cdot \psi'; \tag{5}$$

écrivons dans les mêmes conditions :

$$\Psi'' = \alpha_{11}^{\pi_1} \alpha_{22}^{\pi_2} \ldots \alpha_{nn}^{\pi_n} \cdot \psi'' + R, \tag{6}$$

R désignant un certain reste. En même temps que ψ'' et Ψ'', le reste R est symétrique et linéaire pour les éléments que l'on doit identifier pour réduire ψ'' à ψ'; quand on effectue cette réduction, la fonction R s'annule, ainsi qu'il résulte des équations (5) et (6); par suite, R doit être nul dans la formule (6), et l'on a

$$\Psi'' = \alpha_{11}^{\pi_1} \alpha_{22}^{\pi_2} \ldots \alpha_{nn}^{\pi_n} \psi'',$$

en rapportant la transformée Ψ'' à la substitution $S_{\frac{1}{2}}$. Par suite, *toute fonction semi-invariante ψ' de formes linéaires se déduit d'une fonction analogue ψ'' de mêmes poids, linéaire pour des formes du premier degré et pour les séries de variables : on obtient ψ' au moyen de ψ'', en identifiant certaines séries d'éléments.*

37. Supposons que la fonction semi-invariante ψ'' se rapporte à M séries de variables $x1$, $x2$, ..., et à N formes linéaires a_x, b_x, ... l_x ... Nous représenterons par δ_1, δ_2, δ_3 ... δ_n, les déterminants d'ordre 1, 2, 3, ... n, formés au moyen des 1, 2, 3, ... n premières colonnes du tableau

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n, \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n, \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n, \text{ etc.} \end{array}$$

De même, nous représenterons par δ'_0, δ'_1, ... δ'_{n-2}, δ'_{n-1}, les déterminants d'ordre n, $n - 1$, ... 2, 1, formés au moyen des n, $n - 1$, ... 2, 1 dernières colonnes du tableau des variables

$$\begin{array}{cccc} x1_1 & x1_2 & \dots & x1_n, \\ x2_1 & x2_2 & \dots & x2_n, \\ . & . & . & . \end{array}$$

Nous démontrerons le théorème suivant: *La fonction ψ'' est exprimable comme somme de produits de facteurs δ_1, δ_2, ... δ_n, δ'_0, δ'_1, ... δ'_{n-1}, et de formes linéaires telles que a_x : chacun des produits contient $\pi_i - \pi_{i+1}$ déterminants δ_i ou δ'_i, ($i = 1, 2, \dots n - 1$).*

Cette proposition se vérifie immédiatement pour $M = 0$, $N = 1$, car le seul semi-invariant du premier degré pour la forme a_x est a_1, c'est-à-dire un déterminant δ_1. Pour établir le théorème dans le cas général, on le supposera exact dans le cas de $M = \mu$, $N = \nu$, et on le vérifiera pour $M = \mu$, $N = \nu + 1$ et pour $M = \mu + 1$, $N = \nu$.

Supposons que ψ'' se rapporte à $M = \mu$ séries de variables et à $N = \nu + 1$ formes linéaires comprenant la forme a_x. Nous écrirons

$$\psi'' = a_r\sigma_0 + a_{r-1}\sigma_1 + \cdots + a_1\sigma_{r-1}; \tag{7}$$

a_r est ainsi le terme principal de ψ'', par rapport au groupe des coefficients de forme a_x. D'après ce qui précède (§ 34), σ_0 est une fonction semi-invariante analogue à ψ'', pour laquelle on a

$M = \mu$, $N = \nu$; σ_0 a, du reste, pour les indices r et k ($k \gtrless r$), les poids $\pi_r - 1$ et π_k.

Dans notre supposition, le théorème énoncé ci-dessus est applicable à σ_0 ; par suite, σ_0 s'exprime comme somme de produits de formes linéaires et de déterminants (δ), (δ') : en particulier, chacun des produits contient $\pi_{r-1} - \pi_r + 1$ facteurs δ_{r-1} ou δ'_{r-1}, si l'on suppose $r > 1$. Le nombre $\pi_{r-1} - \pi_r + 1$ est au moins égal à l'unité, puisque l'on a $\pi_{r-1} - \pi_r \geqq 0$, d'après une propriété des fonctions semi-invariantes (§ 33, *Rem.*). En supposant $r > 1$, on peut donc écrire :

$$\sigma_0 = \sum \mathfrak{P} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{r-1} \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{r-1} \end{vmatrix} + \sum \mathfrak{P}' \begin{vmatrix} x1_n & x1_{n-1} & \dots & x1_r \\ x2_n & x2_{n-1} & \dots & x2_r \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix};$$

$\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ désignent des produits de formes linéaires et de déterminants δ_n, δ'_0, δ_i, δ'_i, $(0 < i < n)$: dans ces produits, le nombre des facteurs δ_i, δ'_i est $\pi'_i - \pi_{i+1}$ ou $\pi_r - \pi_{r+1} - 1$, suivant que l'on a $i \gtrless r$ ou $i = r$.

En supposant toujours $r > 1$, prenons :

$$\psi''_r = \sum (-1)^{r-1} \mathfrak{P} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} & b_r \\ . & . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{r-1} & l_r \end{vmatrix} + \sum \mathfrak{P}' \begin{vmatrix} x1_n & x1_{n-1} & \dots & x1_{r+1} & a_{x1} \\ x2_n & x2_{n-1} & \dots & x2_{r+1} & a_{x2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix};$$

ψ''_r est une fonction semi-invariante; d'après la formule (7) et l'expression de σ_0, on peut écrire :

$$\psi'' - \psi''_r = a_{r-1}\sigma'_0 + a_{r-2}\sigma'_1 + \dots + a_1\sigma'_{r-2}.$$

Dans le cas de $r = 1$, le multiplicateur σ_0, compris dans l'équation (7), est une somme $\Sigma\,\mathfrak{P}$, de produits $\mathfrak{P}$ contenant $\pi_1 - \pi_2 - 1$ facteurs δ_1, δ'_1 et $\pi_i - \pi_{i+1}$ facteurs δ_i, δ'_i $(1 < i < n)$. Au lieu de l'expression indiquée ci-dessus pour ψ''_r, on prendra $\psi''_1 = \Sigma\, a_1 \mathfrak{P}$, et on aura évidemment $\psi'' - \psi''_1 = 0$.

Les considérations qui ont été indiquées pour ψ'', sont applicables à $\psi'' - \psi''_r$, dans le cas de $r > 1$; il existe une fonction semi-invariante ψ''_{r-1} telle que l'on peut écrire

$$\psi'' - \psi''_r - \psi''_{r-1} = a_{r-2}\sigma''_0 + a_{r-3}\sigma''_1 + \cdots + a_1\sigma''_{r-3}.$$

En continuant de la même manière, on obtiendra une équation telle que

$$\psi'' - \psi''_r - \psi''_{r-1} - \cdots - \psi''_2 - \psi''_1 = 0.$$

D'après les résultats précédents, chacune des fonctions semi-invariantes ψ''_r, $\psi''_{r-1} \ldots \psi''_1$ est une somme de produits de formes linéaires et de déterminants (δ), (δ') : dans chacun de ces produits, les facteurs δ_i, δ'_i sont en nombre $\pi_i - \pi_{i+1}$, $(0 < i < n)$. La fonction ψ'' jouit de la même propriété. Par suite, le théorème général que nous avons énoncé, se trouve vérifié pour $M = \mu$, $N = \nu + 1$, quand on le suppose exact dans le cas de $M = \mu$, $N = \nu$; on le vérifie pour $M = \mu + 1$, $N = \nu$, en suivant une méthode toute semblable : il faut alors considérer, au lieu de l'équation (7), le développement de la fonction semi-invariante ψ'' suivant les variables (x) d'une même série.

D'après la méthode que nous avons suivie, le théorème énoncé ci-dessus se trouve complètement établi.

38. Toutes les fonctions semi-invariantes ψ' de formes linéaires, et par suite toutes les fonctions semi-invariantes symboliques, se déduisent des fonctions ψ'' moyennant l'identification de certaines séries d'éléments (§ 36); par conséquent, *les fonctions semi-invariantes ψ', de formes linéaires, et les fonctions semi-invariantes symboliques ψ_s, sont des sommes de produits de formes linéaires et de déterminants*

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \delta'_0, \delta'_1 \ldots \delta'_{n-1},$$

tels que

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_i \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_i \end{vmatrix}, \quad \delta'_i = \begin{vmatrix} x1_n & x1_{n-1} & \ldots & x1_{i+1} \\ x2_n & x2_{n-1} & \ldots & x2_{i+1} \\ . & . & . & . \\ xn-i_n & xn-i_{n-1} & \ldots & xn-i_{i+1} \end{vmatrix};$$

chacun des produits contient $\pi_i - \pi_{i+1}$ déterminants $\delta_i, \delta'_i (0 < i < n)$, si $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ sont les poids de ψ' ou de ψ_1; on observera encore que π_n est la différence entre le nombre des facteurs δ_n et le nombre des facteurs δ'_0 compris dans chacun des produits.

En particulier, *un semi-invariant symbolique est une somme de produits de déterminants* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$; *chacun des produits contient* $\pi_i - \pi_{i+1}$ *facteurs* $\delta_i (i = 1, 2, \ldots n-1)$ *et* π_n *facteurs* δ_n.

Une fonction invariante est une fonction semi-invariante de même poids pour tous les indices : par conséquent, *une fonction symbolique invariante est une somme de produits de formes linéaires, de déterminants* δ_n, *tels que* $(\pm a_1, b_2, \ldots l_n)$, *et de covariants identiques* δ'_0, *tels que* $(\pm x1_1, x2_2, \ldots xn_n)$; la différence entre le nombre des facteurs δ_n et le nombre des facteurs δ_0, est égale au poids de la fonction invariante (*).

Remarques. — I. Au moyen de $n - 1$ séries de variables, on ne peut former aucun déterminant δ'_0; il résulte de là que *le poids d'une fonction invariante à* n — 1 *séries de variables ne peut pas être négatif.*

II. Les covariants identiques sont définis par la condition d'être indépendants des coefficients de formes algébriques. D'après le dernier énoncé, *tout covariant identique est une somme de produits de déterminants* δ'_0, *tels que* $(\pm x1_1, x2_2, \ldots xn_n)$.

III. *Toute fonction invariante est une somme de covariants identiques multipliés par des fonctions invariantes de poids positif ou nul,* représentées symboliquement par des agrégats de formes linéaires et de déterminants δ_n analogues à $(\pm a_1, b_2, \ldots l_n)$.

IV. *D'une fonction invariante de formes linéaires (ou symbolique), on déduit une fonction analogue en remplaçant toutes les séries de coefficients et de variables, respectivement par des séries de variables et des séries de coefficients de formes linéaires.*

Cette remarque permet de retrouver le procédé de transmutation des fonctions invariantes, qui a été indiqué au paragraphe 19.

(*) Comp. Clebsch, *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (Journal de Crelle, t. LIX).

39. L'expression symbolique normale d'une fonction invariante φ, de poids positif ou nul ε, est une somme de produits contenant comme facteurs des déterminants δ_n, δ'_0, en nombres ε', ε'' tels que l'on ait $\varepsilon' - \varepsilon'' = \varepsilon$. Chaque couple de facteurs

$$\delta_n = (\pm\, a_1 b_2 \,..\, l_n),$$

$$\delta'_0 = (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)$$

peut être remplacé par le déterminant correspondant

$$(\pm\, a_{x1} b_{x2} \ldots l_{xn}).$$

Conséquemment, *toute fonction invariante* φ, *de poids* ε *positif ou nul, a pour expression symbolique normale une somme de produits* $\mathfrak{P}$ *de formes linéaires, multipliés par des déterminants* δ_n *en nombres* ε.

Prenons

$$\mathfrak{P} = a_{x1}^{m1_1} b_{x1}^{m1_2} \ldots h_{x1}^{m1_l} a_{x2}^{m2_1} \ldots h_{x2}^{m2_l} \ldots a_{xk}^{mk_1} \ldots h_{xk}^{mk_l};$$

nous aurons :

$$m1_1 + m1_2 + \cdots + m1_l = m1,$$

$$m2_1 + m2_2 + \cdots + m2_l = m2, \text{ etc.},$$

$$mk_1 + mk_2 + \cdots + mk_l = mk,$$

en désignant par $m1$, $m2$, ... mk les degrés de φ par rapport aux séries de variables $x1$, $x2$, ... xk.

Soit $a1_x$, $a2_x$, ... ak_x, un système de formes linéaires; on peut écrire

$$\mathfrak{P} = O_1\, a1_{x1}^{m1} a2_{x2}^{m2} \ldots ak_{xk}^{mk},$$

si l'on représente par O_1 l'opération polaire

$$\frac{1}{m1\,!\,m2\,!\ldots mk\,!}\left(a\frac{d}{da1}\right)^{m1_1}\left(b\frac{d}{da1}\right)^{m1_2}\cdots\left(h\frac{d}{da1}\right)^{m1_l}\left(a\frac{d}{da2}\right)^{m2_1}$$

$$\cdots\left(h\frac{d}{da2}\right)^{m2_l}\cdots\left(a\frac{d}{dak}\right)^{mk_1}\cdots\left(h\frac{d}{dak}\right)^{mk_l},$$

qui est relative aux coefficients $a1, a2, \ldots ak$. Par suite, *l'expression*

$$\sum O_1\, a1_{x1}^{m1} a2_{x2}^{m2} \ldots ak_{xk}^{mk}\, \Pi\delta_n$$

peut servir à représenter symboliquement toutes les fonctions invariantes, de poids positif ou nul, et des degrés m1, m2, ..., mk, *pour les séries de variables* x1, x2, ..., xk.

Remarque. — Soit φ une fonction invariante de poids négatif, $-\eta$; on peut toujours associer à φ un invariant φ_0 de poids égal ou supérieur à η : on prendra, par exemple, pour φ_0, l'invariant

$$(\pm\, \xi 1_1 \xi 2_2 \ldots \xi n_n)^{\eta+\varepsilon},$$

qui se rapporte à n formes linéaires $\xi 1_x, \xi 2_x, \ldots, \xi n_x$. Dans ces conditions, $\varphi \cdot \varphi_0$ est une fonction invariante à laquelle le dernier énoncé est applicable.

40. Soit ψ_s un semi-invariant symbolique de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$; nous écrirons

$$\psi_s = \sum \Pi\delta_i,$$

en désignant par $\Pi\delta_i$ un produit de déterminants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, analogues à

$$\delta_i = (\pm\, a_1 b_2 \ldots l_i);$$

chacun des produits $\Pi\delta_i$ contiendra $\pi_i - \pi_{i+1}$ ou π_n facteurs δ_i, suivant que l'on a $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ou $i = n$.

Remplaçons dans l'expression de ψ_s les déterminants δ_i par les déterminants correspondants $[\Delta_i]$ analogues à

$$[\Delta_i] = (\pm\, a_{x1} b_{x2} \ldots l_{xi});$$

nous obtiendrons la fonction invariante symbolique de poids zéro

$$[\Psi_s] = \sum \Pi\, [\Delta_i],$$

qui est des degrés $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ pour les variables $x1, x2, \ldots, xn$.

Recherchons dans le développement de $[\Psi_s]$, le coefficient $\varkappa$ du produit

$$\mathfrak{P}_x = x1_1^{m1_1} x1_2^{m1_2} \ldots x1_n^{m1_n} x2_1^{m2_1} x2_2^{m2_2} \ldots x2_n^{m2_n} \ldots xn_1^{mn_1} \ldots xn_n^{mn_n},$$

en supposant

$$\left.\begin{array}{c} m1_i + m2_i + \cdots + mn_i = \pi_i, \\ mi_1 + mi_2 + \cdots + mi_n = \pi_i, \\ i = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

La formule

$$[\Psi_s] = \sum \Pi [\Delta_i]$$

conduit à faire la remarque suivante : Pour obtenir dans $\Pi[\Delta_i]$ un terme contenant le produit $\mathfrak{P}_x$, il faut considérer dans les facteurs $[\Delta_i]$ les quantités

$$(\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xi_i) \times \delta_i.$$

On trouve alors que le coefficient de $\mathfrak{P}_x$ dans $[\Psi_s]$ est

$$\varkappa = \zeta \,.\, \psi_s, \qquad (9)$$

si l'on désigne par ζ le coefficient de $\mathfrak{P}_x$ dans la fonction

$$\Pi_{i=1}^{n-1} (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xi_i)^{\pi_i - \pi_{i+1}} \,.\, (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi_n}.$$

D'un autre côté, la fonction invariante symbolique $[\Psi_s]$, qui est de poids zéro, peut s'écrire

$$[\Psi_s] = O'_1\, a1_{x1}^{\pi_1} a2_{x2}^{\pi_2} \ldots an_{xn}^{\pi_n},$$

O'_1 étant une opération polaire relative aux coefficients $a1$, $a2$, ..., an (§ 39).

D'après la dernière formule, on obtient :

$$\varkappa = \varepsilon O'_1 a1_1^{m1_1} a1_2^{m1_2} \ldots a1_n^{m1_n} a2_1^{m2_1} a2_2^{m2_2} \ldots a2_n^{m2_n} \ldots an_1^{mn_1} \ldots an_n^{mn_n}, \quad (10)$$

si l'on représente par ε un facteur numérique positif.

La comparaison des équations (9) et (10) donne :

$$\frac{\zeta^2}{\varepsilon} \psi_s = \zeta\; O'_1\, a1_1^{m1_1} a1_2^{m1_2} \ldots an_n^{mn_n}.$$

Additionnons membre à membre les formules analogues, correspondant à tous les systèmes de nombres $m1_1, m1_2, \ldots, mn_n$ qui satisfont aux relations (8); d'après la valeur du coefficient ζ, nous obtiendrons :

$$\zeta'\psi_s = O'_1\, a1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm\, a1_1a2_2)^{\pi_2-\pi_3}$$

$$\ldots(\pm\, a1_1a2_2\ldots an - 1_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n}(\pm\, a1_1a2_2\ldots an_n)^{\pi_n},$$

ζ' désignant un facteur numérique différent de zéro. En conséquence, *tout semi-invariant symbolique de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *se déduit de*

$$a1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm\, a1_1a2_2)^{\pi_2-\pi_3}$$

$$\ldots(\pm\, a1_1a2_2\ldots an - 1_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n}(\pm\, a1_1a2_2\ldots an_n)^{\pi_n},$$

au moyen d'une opération polaire O_c *relative aux coefficients* a1, a2, ..., an.

Exemple. — Soit

$$\psi_s = a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix};$$

on trouve :

$$\psi_s = O_c\, a1_1(\pm\, a1_1a2_2a3_3),$$

en prenant

$$O_c = \frac{1}{8}\, a\frac{d}{da1}\begin{vmatrix} b\dfrac{d}{da1} & b\dfrac{d}{da2} & b\dfrac{d}{da3} \\ c\dfrac{d}{da1} & c\dfrac{d}{da2} & c\dfrac{d}{da3} \\ l\dfrac{d}{da1} & l\dfrac{d}{da2} & l\dfrac{d}{da3} \end{vmatrix}.$$

41. Fonctions analogues aux semi-invariants symboliques. — On peut rattacher aux semi-invariants symboliques certaines fonctions que nous aurons à considérer dans la suite; ces fonctions, que nous appellerons *semi-covariants identiques de seconde espèce*, dépendent seulement des variables $x1$, $x2$, ... ; elles sont isobariques et solutions des équations $(i, i+1) = 0$, c'est-à-dire

$$x1_i \frac{d}{dx1_{i+1}} + x2_i \frac{d}{dx2_{i+1}} + \cdots = 0. \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Soient $-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_n$ les poids d'une pareille fonction λ; en remplaçant les variables $x1, x2, \ldots$ par des coefficients symboliques $a, b, \ldots$, on déduit de λ une fonction symbolique ψ_s, de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, qui est solution des équations

$$a_i \frac{d}{da_{i+1}} + b_i \frac{d}{db_{i+1}} + \cdots = 0,$$

c'est-à-dire

$$(i+1, i) = 0.$$

La fonction ψ_s est, par suite, un semi-invariant symbolique.

D'après la correspondance établie entre les fonctions λ et ψ_s, nous pouvons énoncer les propositions suivantes (*) :

1° *Entre les poids* $-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_n$ *d'un semi-covariant identique de seconde espèce, il existe les relations*

$$\pi_i - \pi_{i+1} \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

2° *Tout semi-covariant identique de seconde espèce, de poids* $-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_n$, *se déduit de*

$$x1_1^{\pi_1 - \pi_2} (\pm\, x1_1 x2_2)^{\pi_2 - \pi_3} \ldots (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi_n},$$

au moyen d'une opération polaire O_v *relative aux variables.*

Cas particulier. — Les covariants identiques sont des fonctions λ de même poids pour tous les indices; par conséquent, *tous les covariants identiques se déduisent des puissances de* $(\pm\, x1_1, x2_2, \ldots, xn_n)$, *au moyen d'opérations polaires relatives aux variables.*

(*) J. Deruyts, *Sur la généralisation,* etc., p. 20.

42. Soit U une fonction algébrique entière et homogène de quelques-unes des séries de quantités

$$\begin{matrix} v1_1 & v1_2 & \dots & v1_n, \\ v2_1 & v2_2 & \dots & v2_n, \\ . & . & . & . \\ vn_1 & vn_2 & \dots & vn_n; \end{matrix}$$

on peut énoncer la propriété suivante :

Si l'on a

$$v1\frac{d}{dv2}U=0,\quad v2\frac{d}{dv3}U=0,\quad \dots\quad vn-1\frac{d}{dvn}U=0,$$

la fonction U *est développable suivant les produits et puissances des déterminants*

$$v1_{i_1},\quad \left(\pm v1_{i_1}v2_{i_2}\right),\quad \left(\pm v1_{i_1}v2_{i_2}v3_{i_3}\right),\quad \dots\quad (\pm v1_1v2_2\dots vn_n),$$
$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \dots = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

En effet, si l'on remplace vi_j par aj_i et si l'on considère comme des *constantes* les quantités différentes de $v1$, $v2$, ..., vn, on déduit de U une fonction qui satisfait aux équations

$$a1_i\frac{d}{da1_{i+1}}+a2_i\frac{d}{da2_{i+1}}+\dots=0,\quad i=1,\ 2,\dots,n-1.$$

La nouvelle fonction obtenue est, par suite, une somme de semi-invariants aux symboles $a1$, $a2$, ..., an. D'après l'expression des semi-invariants symboliques, on obtient la propriété énoncée.

Corollaire. — *Si* U *est solution des équations*

$$v1\frac{d}{dv2}U=0,\quad v2\frac{d}{dv3}U=0,\quad \dots\quad vn-1\frac{d}{dvn}U=0,$$

et contient au même degré ε *les quantités* $v1$, $v2$, ..., vn, *la fonction* U *est divisible par*

$$(\pm v1_1\,v2_2\dots vn_n)^{\varepsilon}\ (*).$$

(*) Ce dernier résultat s'obtient aussi comme cas particulier d'un autre théorème établi par M. Capelli (*Memorie della R. Acad. dei Lincei,* 1882, p. 576).

Sources des fonctions invariantes.

43. Soit φ une fonction invariante aux variables $x1, x2, \ldots, xn, y1, y2, \ldots$; désignons par $m1, m2, \ldots, mn$ les degrés de φ par rapport aux variables $x1, x2, \ldots, xn$, quelques-uns de ces nombres pouvant être nuls.

Nous appellerons *source* de φ la fonction qui multiplie dans φ le produit

$$x1_1^{m1}x2_2^{m2}\ldots xn_n^{mn}.$$

Écrivons

$$\varphi = t_0 x1_1^{m1}x2_2^{m2}\ldots xn_n^{mn} + \cdots + t\, x1_1^{m1_1}x1_2^{m1_2}\ldots xn_1^{mn_1}\ldots xn_n^{mn_n} + \cdots,$$

les fonctions t étant indépendantes de $x1, x2, \ldots, xn$; t_0 sera la source de φ. Si nous désignons comme précédemment par π le poids de φ, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \delta^\pi . \varphi = {} & \mathrm{T}_0\, \mathrm{X}1_1^{m1}\mathrm{X}2_2^{m2}\ldots \mathrm{X}n_n^{mn} + \cdots \\ & + \mathrm{T}\, \mathrm{X}1_1^{m1_1}\mathrm{X}1_2^{m1_2}\ldots \mathrm{X}n_1^{mn_1}\ldots \mathrm{X}n_n^{mn_n} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Identifions, dans les deux membres de cette équation, les multiplicateurs de

$$\mathrm{X}1_1^{m1}\mathrm{X}2_2^{m2}\ldots \mathrm{X}n_n^{mn};$$

d'après les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\mathrm{X}_1 + \alpha_{12}\mathrm{X}_2 + \cdots + \alpha_{1n}\mathrm{X}_n, \\ x_2 &= \alpha_{21}\mathrm{X}_1 + \alpha_{22}\mathrm{X}_2 + \cdots + \alpha_{2n}\mathrm{X}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n1}\mathrm{X}_1 + \alpha_{n2}\mathrm{X}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\mathrm{X}_n, \end{aligned}$$

nous obtiendrons :

$$\mathrm{T}_0 = \delta^\pi \left\{ t_0\, \alpha_{11}^{m1}\alpha_{22}^{m2}\ldots\alpha_{nn}^{mn} + \cdots + t\, \alpha_{11}^{m1_1}\alpha_{21}^{m1_2}\ldots\alpha_{1n}^{mn_1}\ldots\alpha_{nn}^{mn_n} + \ldots \right\}.$$

En comparant cette formule au développement de φ, on est conduit au théorème suivant :

Toute fonction invariante φ, de poids π, est exprimable par

$$[\mathrm{T}_0] . (\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{-\pi},$$

si l'on représente par $[T_0]$ *la transformée de la source* t_0, *dans laquelle on a remplacé* $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ *par*

$$x1_i, x2_i, \ldots xn_i \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Corollaires. — I. *Dans toute fonction invariante, la source est différente de zéro.*

II. *Une fonction invariante est définie par sa source, à part une puissance du déterminant*

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n).$$

III. Toute relation algébrique entre des fonctions invariantes donne lieu à la relation correspondante entre les sources. D'un autre côté, toute relation algébrique entre les sources de fonctions invariantes correspond à une relation analogue entre les fonctions invariantes multipliées par des puissances de

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n).$$

En particulier, *toute relation entre des fonctions invariantes, indépendantes des variables* xn, *donne lieu à la relation correspondante entre les sources, et réciproquement.*

Remarque. — On déduit de l'équation (11) que la transformée d'une combinaison linéaire $\mathcal{L}$ des coefficients de φ est exprimable comme fonction du premier degré des coefficients primitifs. En particulier, si on réduit la substitution des variables au cas de

$$x_l = X_l + \varepsilon X_h, \qquad x_k = X_k \, (k \gtrless h),$$

$\mathcal{L}$ a pour transformée (§ 23)

$$\mathcal{L} + \frac{\varepsilon}{1}(h, l)\,\mathcal{L} + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(h, l)^2\,\mathcal{L} + \cdots$$

Il en résulte que $(h, l)\,\mathcal{L}$ *est exprimable linéairement au moyen des coefficients primitifs de la fonction invariante* φ.

44. Soit g une fonction isobarique des coefficients de formes algébriques et des variables $y1$, $y2$, ...; nous écrirons symboliquement

$$g \equiv \sum \Pi\, a_i \times \Pi\, y_i.$$

La transformée de g pour la substitution la plus générale est représentée par

$$G \equiv \sum \Pi\, A_i \times \Pi\, Y_i.$$

On a

$$A_i = \alpha_{1i} a_1 + \alpha_{2i} a_2 + \cdots + \alpha_{ni} a_n;$$

Y_i est déterminé par les équations

$$y_1 = \alpha_{11} Y_1 + \alpha_{12} Y_2 + \cdots + \alpha_{1n} Y_n,$$
$$y_2 = \alpha_{21} Y_1 + \alpha_{22} Y_2 + \cdots + \alpha_{2n} Y_n, \text{ etc.};$$
$$y_n = \alpha_{n1} Y_1 + \alpha_{n2} Y_2 + \cdots + \alpha_{nn} Y_n;$$

conséquemment, on obtient

$$G \equiv \sum \Pi (a_1 \alpha_{1i} + a_2 \alpha_{2i} + \cdots + a_n \alpha_{ni}) \times \Pi \frac{(\pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{i-1,i-1} y_i \alpha_{i+1,i+1} \ldots \alpha_{nn})}{(\pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn})}.$$

Si nous remplaçons α_{i1}, α_{i2}, ..., α_{in} par $x1_i$, $x2_i$, ..., xn_i, la fonction G devra être remplacée par une quantité [G], et nous aurons

$$[G] \times (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^\rho$$
$$\equiv \sum \Pi\, a_{xi} \times \Pi\, (\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xi - 1_{i-1} y_i\, xi + 1_{i+1} \ldots xn_n),$$

en désignant par ρ le degré total de g par rapport aux variables $y1$, $y2$, ...

Le second membre de la dernière formule représente symboliquement la fonction invariante de poids $-\rho$, qui a pour source g. Conséquemment, *toute fonction isobarique* g, *de degré total* ρ *pour les variables* y1, y2, ..., *est la source d'une fonction invariante, de poids* $-\rho$, *obtenue en multipliant par*

$$(\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^\rho$$

la transformée G, *dans laquelle on a remplacé* α_{i1}, α_{i2}, ..., α_{in} *par*

$$x1_i,\ x2_i, \ldots xn_i.$$

En particulier : *Toute fonction isobarique* g *des coefficients de formes algébriques est la source d'une fonction invariante, de poids zéro* [G], *obtenue en remplaçant* α_{i1}, α_{i2}, α_{in} *par* $x1_i$, $x2_i$, ..., xn_i *dans la transformée* G; les degrés de [G] par rapport aux variables $x1$, $x2$, ..., xn sont les poids π_1, π_2, ..., π_n de la fonction g.

45. A toute fonction invariante φ on peut associer un invariant φ_0, tel que l'on ait, en expression symbolique normale,

$$\varphi \cdot \varphi_0 \equiv \sum O\, a1_{x1}^{m1} a2_{x2}^{m2} \dots ak_{xk}^{mk} \,.\, \Pi\, \delta_n$$

(§ 39); dans cette formule, O représente une opération polaire relative aux coefficients $a1$, $a2$, ..., ak et aux coefficients symboliques; $m1$, $m2$, ..., mk sont les degrés de φ pour les variables $x1$, $x2$, ..., xk.

Tout coefficient τ de $\varphi.\varphi_0$, représenté par

$$\tau \equiv \sum O\, a\, 1_1^{m1_1} a1_2^{m1_2} \dots a1_n^{m1_n} a2_1^{m2_1} \dots a2_n^{m2_n} \dots ak_n^{mk_n} \,.\, \Pi\, \delta_n,$$

est la source d'une fonction invariante à n séries de variables

$$\varphi_1 \equiv \sum O\, a\, 1_{x1}^{m1_1} a1_{x2}^{m1_2} \dots a1_{xn}^{m1_n} a2_{x1}^{m2_1} \dots ak_{xn}^{mk_n} \,.\, \Pi\, \delta_n.$$

D'autre part,

$$\varphi' \cdot \varphi_0 \equiv \sum O\, a1_{y1}^{m1} a2_{y2}^{m2} \dots ak_{yk}^{mk} \,.\, \Pi\, \delta_n$$

est une polaire de $\varphi.\varphi_0$ par rapport aux variables, et l'on obtient φ_1 en appliquant à $\varphi'.\varphi_0$ l'opération polaire

$$\frac{1}{m1\,!\; m2!\, \dots\, mk!}\left(x1\frac{d}{dy1}\right)^{m1_1}\left(x2\frac{d}{dy1}\right)^{m1_2}\dots\left(xn\frac{d}{dy1}\right)^{m1_n}\dots$$
$$\dots\left(x1\frac{d}{dy2}\right)^{m2_1}\dots\left(xn\frac{d}{dyk}\right)^{mk_n}.$$

Par suite, φ_1 est une polaire de $\varphi_0.\varphi$; en d'autres termes, φ_1 est le produit de φ_0 par une polaire de φ; la fonction τ est également le produit de φ_0 par un coefficient de φ, qui peut être supposé quelconque. Il résulte de là que *tout coefficient d'une fonction invariante φ est la source d'une fonction invariante à* n *séries de variables, déduite de φ au moyen d'une opération polaire relative aux variables.*

Covariants primaires (*).

46. Soit ψ un semi-invariant de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$; ψ est la source d'une fonction invariante $[\Psi]$, de poids zéro, contenant aux degrés $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les variables $x1$, $x2$, ..., xn (§ 44). Nous pouvons écrire

$$\psi = \sum \Pi\, \delta_i \times \Pi' \delta_n;$$

$\Pi\delta_i$ désigne alors un produit de déterminants δ_i, d'ordre $i = 1, 2, \ldots, n-1$, analogues à

$$\delta_i = (\pm\, a_1 b_2 \ldots h_i),$$

et en nombres $\pi_i - \pi_{i+1}$; $\Pi'\delta_n$ est un produit de π_n déterminants δ_n, d'ordre n, analogues à

$$\delta_n = (\pm\, a_1 b_2 \ldots l_n).$$

La fonction invariante $[\Psi]$ sera représentée symboliquement par la somme de produits

$$\sum \Pi\, [\Delta_i] \times \Pi'\, [\Delta_n],$$

que l'on obtient en remplaçant les déterminants analogues à

$$\delta_i = (\pm\, a_1 b_2 \ldots h_i), \quad \delta_n = (\pm\, a_1 b_2 \ldots l_n)$$

par les déterminants correspondants

$$[\Delta_i] = \begin{vmatrix} a_{x1} & a_{x2} \ldots & a_{xi} \\ b_{x1} & b_{x2} \ldots & b_{xi} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ h_{x1} & h_{x2} \ldots & h_{xi} \end{vmatrix}, \quad [\Delta_n] = \begin{vmatrix} a_{x1} & a_{x2} \ldots & a_{xn} \\ b_{x1} & b_{x2} \ldots & b_{xn} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ l_{x1} & l_{x2} \ldots & l_{xn} \end{vmatrix} \;(^{**}).$$

(*) J. Deruyts, *Sur les transformations linéaires et la théorie des covariants* (Mém. couronnés et Mém. des Sav. Étr. publiés par l'Acad. de Belgique, t. LI, in-4°).

(**) Voir, pour comparaison, le paragraphe 40.

On voit immédiatement que dans le développement de

$$[\Psi] \equiv \sum \Pi\,[\Delta_i]\,\Pi'\,[\Delta_n],$$

la source

$$\psi \equiv \sum \Pi\,\delta_i' \times \Pi'\,\delta_n$$

se trouve multipliée par

$$x1_1^{\pi_1 - \pi_2}(\pm\, x1_1 x2_2)^{\pi_2 - \pi_3} \ldots$$

D'après l'équation symbolique

$$[\Psi] \equiv \sum \Pi\,[\Delta_i] \times \Pi'\,[\Delta_n],$$

$[\Psi]$ est le produit de $(\pm\, x1_1,\ x2_2,\ \ldots,\ xn_n)^{\pi_n}$ par la fonction invariante

$$\chi \equiv \sum \Pi\,[\Delta_i] \times \Pi'\,\delta_n.$$

Nous appellerons *covariants primaires*, les fonctions invariantes analogues à χ.

D'après ce qui précède, les covariants primaires

$$\chi \equiv \sum \Pi\,[\Delta_i] \times \Pi'\,\delta_n$$

contiennent les seules variables $x1,\ x2,\ \ldots,\ xn-1$ et ont pour sources les semi-invariants

$$\psi \equiv \sum \Pi\,\delta_i\,.\,\Pi'\,\delta_n;$$

si ψ a les poids $\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_n$, les degrés de χ par rapport aux variables $x1,\ x2,\ \ldots,\ xn-1$ ont les valeurs

$$m1 = \pi_1 - \pi_n, \quad m2 = \pi_2 - \pi_n, \quad \ldots, \quad mn-1 = \pi_{n-1} - \pi_n;$$

le poids π de χ est égal à π_n.

Remarques. — I. *Les covariants primaires indépendants des variables sont les invariants les plus généraux*, puisqu'ils sont représentés symboliquement par des sommes de produits de déterminants tels que $(\pm\, a_1,\ b_2,\ \ldots,\ l_n)$.

II. Dans le cas particulier de $n = 2$, les covariants primaires ont pour expressions symboliques des sommes de produits de formes linéaires a_{x1} et de déterminants $(\pm a_1 b_2)$. Par conséquent, *les covariants primaires, dans le cas de* n $= 2$, *sont les fonctions invariantes à une seule série de variables.*

47. Le semi-invariant ψ peut être représenté symboliquement par

$$\psi \equiv O_c\, a1_1^{\pi_1 - \pi_2} (\pm a1_1 a2_2)^{\pi_2 - \pi_3} \ldots$$
$$\ldots (\pm a1_1 a2_2 \ldots an - 1_{n-1})^{\pi_{n-1} - \pi_n} . (\pm a1_1 a2_2 \ldots an_n)^{\pi_n},$$

O_c désignant une opération polaire relative aux coefficients (§ 40); on déduit de là

$$[\Psi] \equiv O_c a1_{x1}^{\pi_1 - \pi_2} (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{\pi_2 - \pi_3} \ldots$$
$$\ldots (\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots an - 1_{xn-1})^{\pi_{n-1} - \pi_n} . (\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots an_{xn})^{\pi_n};$$

puis, en divisant par $(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi_n}$,

$$\chi \equiv O_c\, a1_{x1}^{\pi_1 - \pi_2} (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{\pi_2 - \pi_3} \ldots$$
$$\ldots (\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots an - 1_{xn-1})^{\pi_{n-1} - \pi_n} . (\pm a1_1 a2_2 \ldots an_n)^{\pi_n}.$$

Si l'on désigne, comme ci-dessus, par π, $m1$, $m2$, ..., $mn - 1$ le poids et les degrés de χ pour les variables $x1$, $x2$, ..., $xn - 1$, on peut encore écrire

$$\chi \equiv O_c a1_{x1}^{m1 - m2} (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{m2 - m3} \ldots (\pm a1_{x1} a2_{x1} \ldots an - 2_{xn-2})^{mn-2 - mn-1}$$
$$(\pm a1_{x1} a2_{x2} \ldots an - 1_{xn-1})^{mn-1} . (\pm a1_1 a2_2 \ldots an_n)^{\pi}.$$

Application. — Désignons par D l'opération

$$D = \left(\frac{d}{dx1_1}\right)^{\pi_1 - \pi_2} . \left(\pm \frac{d}{dx1_1} \frac{d}{dx2_2}\right)^{\pi_2 - \pi_3} \ldots$$
$$\ldots \left(\pm \frac{d}{dx1_1} \frac{d}{dx2_2} \cdots \frac{d}{dxn - 1_{n-1}}\right)^{\pi_{n-1} - \pi_n};$$

nous aurons

$$D\chi \equiv O_c D\, a1_{x1}^{\pi_1-\pi_2}(\pm a1_{x1}a2_{x2})^{\pi_2-\pi_3} \ldots (\pm a1_1 a2_2 \ldots an_n)^{\pi}.$$

Il est visible que cette équation symbolique peut être remplacée par

$$D\chi \equiv D x1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm x1_1x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots (\pm x1_1x2_2 \ldots xn-1_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n}$$

$$\times\, O_c\, a\, 1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm a1_1a2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots$$

$$\ldots (\pm a1_1a2_2 \ldots an-1_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n} . (\pm a1_1 \, . \, . \, an_n)^{\pi_n},$$

ou encore, par l'équation effective

$$D\chi = \psi \, . \, D\, x1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm x1_1x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots .$$

Si l'on écrit

$$x1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm x1_1x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots = \sum \varepsilon\, x1_1^{\alpha} x1_2^{\beta} \ldots x2_1^{\gamma} \ldots ,$$

les lettres ε désignant des coefficients numériques, on a :

$$D = \sum \varepsilon \frac{d^{\cdots}}{dx1_1^{\alpha} dx1_2^{\beta} \ldots dx2_1^{\gamma} \ldots};$$

on obtient ensuite :

$$D\, x1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm x1_1x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots = \sum \varepsilon^2\, \alpha!\, \beta! \ldots \gamma! \ldots$$

Il résulte de là que *l'opération* D, *appliquée au covariant primaire* χ, *donne comme résultat la source* ψ *de ce covariant, abstraction faite d'un facteur numérique différent de zéro.*

CHAPITRE IV.

RÉDUCTION DES FONCTIONS INVARIANTES.

Réduction des fonctions invariantes aux covariants primaires (*).

48. Soit p une fonction homogène et isobarique, dépendant seulement des coefficients d'un système de formes. Effectuons la substitution S définie par

$$x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n; \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

la transformée P pourra s'écrire

$$P = \theta_{11}p_1 + \theta_{12}p_2 + \cdots + \theta_{1r}p_r; \tag{1}$$

dans cette formule, les lettres θ désignent des fonctions entières des paramètres α_{ij}; $p_1, p_2, \ldots p_r$ représentent des fonctions analogues à p. Nous supposerons que les quantités (p) sont réduites au nombre r le plus petit possible.

Indiquons en général par $[\mathcal{F}]$ le résultat obtenu en remplaçant, dans la fonction $\mathcal{F}$, les paramètres $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ par les variables $x1_i, x2_i, \ldots xn_i, (i = 1, 2, \ldots n)$; nous obtiendrons, par la formule (1) :

$$[P] = [\theta_{11}]\, p_1 + [\theta_{12}]\, p_2 + \cdots + [\theta_{1r}]\, p_r \cdot \tag{1'}$$

La quantité [P] est la fonction invariante de poids zéro, aux variables $x1, x2, \ldots, xn$, qui a pour source p (§ 44); les groupes de fonctions $[\theta_{11}], [\theta_{12}], \ldots$ et $p_1, p_2, \ldots, p_r$ dépendent d'éléments

(*) J. Deruyts, *Sur les transformations linéaires et la théorie des covariants.*

d'espèces différentes; en outre, il ne peut y avoir aucune réduction pour le nombre r des termes compris dans l'équation (1'). D'après ces remarques et d'après les résultats indiqués au paragraphe 12, *les transformées de* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *et de* $[\theta_{11}]$, $[\theta_{12}], \ldots, [\theta_{1r}]$ *s'expriment respectivement en fonctions linéaires de* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *et de* $[\theta_{11}], [\theta_{12}], \ldots, [\theta_{1r}]$.

49. Désignons par $\mathcal{S}_1$ la suite des quantités du système $p_1, p_2, \ldots, p_r$, pour lesquelles le poids relatif à l'indice 1 a la valeur la plus élevée. Soient

$$\mathcal{S}_2, \quad \mathcal{S}_3, \quad \ldots, \quad \mathcal{S}_{j-1}, \quad \mathcal{S}_j, \quad \ldots, \quad \mathcal{S}_{n-1}$$

les suites de quantités déterminées par la condition que $\mathcal{S}_j$ comprend les termes de la suite $\mathcal{S}_{j-1}$, pour lesquels le poids relatif à l'indice j est le plus grand.

Soit p_t un terme de la suite $\mathcal{S}_{n-1}$; nous représenterons par $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les poids de p_t, par rapport aux indices $1, 2, \ldots, n$.

Si nous effectuons la substitution linéaire

$$x_1 = X_1 + \varepsilon X_2, \quad x_k = X_k, \quad (k > 1), \tag{S_{21}}$$

la transformée P_t de p_t est exprimée par

$$P_t = p_t + \frac{\varepsilon}{1}(2, 1)\, p_t + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2}(2, 1)^2\, p_t + \cdots$$

La quantité $(2, 1)\, p_t$ doit être nulle ou être fonction linéaire de $p_1, p_2, \ldots, p_r$, puisque P_t est une combinaison linéaire de p_1, $p_2, \ldots, p_r$. Le deuxième cas ne peut pas se présenter; en effet, la quantité $(2, 1)\, p_t$ a le poids $\pi_1 + 1$ pour l'indice 1, et d'après le mode de formation des suites $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{n-1}$, les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ont au plus le poids π_1 pour l'indice 1. On a donc

$$(2, 1)\, p_t = 0.$$

Semblablement, si l'on effectue la substitution

$$x_2 = X_2 + \varepsilon X_3, \quad x_k = X_k, \quad (k \gtrless 2). \tag{S_{32}}$$

on obtient, pour la transformée correspondante,

$$P_t = p_t + \frac{\varepsilon}{1}(3, 2)\,p_t + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}(3, 2)^2\,p_t + \cdots$$

La quantité $(3, 2)\,p_t$ a pour poids $\pi_1, \pi_2 + 1$, relativement aux indices 1, 2. Par hypothèse, les termes de la suite p_1, $p_2, \ldots, p_r$ qui ont le poids π_1 pour l'indice 1, ont au plus le poids π_2 pour l'indice 2; en conséquence, $(3, 2)\,p_t$ ne peut pas être une combinaison linéaire de $p_1, p_2, \ldots, p_r$. D'après cette remarque, on a $(3, 2)\,p_t = 0$. En continuant ainsi de suite, on obtiendra les $n - 1$ équations

$$(i + 1, i)\,p_t = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{2}$$

D'après nos suppositions, la fonction p_t est isobarique; conséquemment, *p_t est un semi-invariant.*

50. La transformée P_t, relative à une substitution quelconque, peut s'écrire :

$$P_t = \theta_1 p'_1 + \theta_2 p'_2 + \cdots + \theta_h p'_h, \tag{3}$$

moyennant les conventions suivantes :

1° $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$ représentent des fonctions analogues à $p_1, p_2, \ldots$;

2° $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$ désignent des quantités dépendant seulement des paramètres α_{ij};

3° La formule (3) ne peut pas être remplacée par une formule analogue, comprenant un nombre de termes inférieur à h.

La transformée P_t se réduit à p_t, si l'on suppose $\alpha_{ij} = 0$ pour i différent de j, et $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{nn} = 1$; on peut donc prendre $p'_1 = p_t$.

D'après le théorème énoncé au paragraphe 48, P_t est une combinaison linéaire de $p_1, p_2, \ldots, p_r$; nous écrirons :

$$P_t = \theta_{t1} p_1 + \theta_{t2} p_2 + \cdots + \theta_{tr} p_r, \tag{4}$$

en indiquant par les lettres θ des fonctions entières des paramètres α_{ij}.

Il résulte des formules (3) et (4) que le nombre h ne peut pas être supérieur à r; on a de plus :

$$\theta_{t1}p_1 + \theta_{t2}p_2 + \cdots + \theta_{tr}p_r = \theta_1 p'_1 + \theta_2 p'_2 + \cdots + \theta_h p'_h.$$

Par l'identification des coefficients des mêmes produits de facteurs α_{ij}, on obtient des relations du premier degré

$$\mathfrak{L}(p) = \mathfrak{L}'(p'), \tag{4'}$$

entre $p_1, p_2, \ldots, p_r$ et $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$. Si les fonctions $\mathfrak{L}(p)$ étaient des combinaisons linéaires de $h - h_1$ d'entre elles, $(h_1 > 0)$, la somme

$$\theta_{t1}p_1 + \theta_{t2}p_2 + \cdots + \theta_{tr}p_r,$$

c'est-à-dire P_t, serait exprimable au moyen de $h - h_1$ quantités analogues à p, multipliées par des fonctions des paramètres α_{ij}; une pareille réduction serait contraire aux suppositions que nous avons admises au sujet de la formule (3). Ainsi, il y a h fonctions $\mathfrak{L}(p)$ linéairement indépendantes; d'après les équations (4'), *les quantités* p' *sont des combinaisons linéaires de* $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_r$, *et l'on peut exprimer* h *termes de la suite* $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_r$ *au moyen des* $\mathrm{r} - \mathrm{h}$ *termes restants et de* $\mathrm{p}'_1, \mathrm{p}'_2, \ldots, \mathrm{p}'_h$. Nous écrirons, en conséquence, d'après la formule (1) :

$$P = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \cdots + \eta_v p_v + \eta_{v+1} p'_1 + \eta_{v+2} p'_2 + \cdots + \eta_r p'_h; \tag{5}$$

dans cette relation, on a $v = r - h$; les fonctions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ dépendent seulement des paramètres α_{ij} et elles sont nécessairement différentes de zéro, car la transformée P ne peut pas s'exprimer par moins de r termes (§ 48).

51. Au moyen d'un changement de notation, on déduit de la formule (3) :

$$[P_t] = [\theta_1]\, p'_1 + [\theta_2]\, p'_2 + \cdots + [\theta_h]\, p'_h; \tag{3'}$$

$[P_t]$ est alors la fonction invariante de poids zéro, aux variables $x1, x2, \ldots, xn$, qui a pour source le semi-invariant $p'_1 = p_t$.

Puisque le semi-invariant $p'_1 = p_t$ a pour poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, il se trouve multiplié dans $[P_t]$ par

$$x1_1^{\pi_1-\pi_2} (\pm x1_1 x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots (\pm x1_1 x2_2 \ldots xn-1_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n} \ldots (\pm x1_1 \ldots xn_n)^{\pi_n}$$

(§ 46). D'un autre côté, le développement (3') de $[P_t]$ est réduit au plus petit nombre possible de termes; on a donc

$$[\theta_1] = x1_1^{\pi_1-\pi_2} (\pm x1_1 x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots (\pm x1_1 \ldots xn_n)^{\pi_n}. \qquad (6)$$

52. Reprenons maintenant la formule (5); nous en déduisons :

$$[P] = [\eta_1]\, p_1 + [\eta_2]\, p_2 + \cdots + [\eta_v]\, p_v + [\eta_{v+1}]\, p'_1 + \cdots + [\eta_r]\, p'_h. \qquad (7)$$

La fonction invariante [P] étant de poids zéro, les termes correspondants des suites

$$[\eta_1],\ [\eta_2],\ \ldots,\ [\eta_v],\ [\eta_{v+1}],\ \ldots,\ [\eta_r]$$

et

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_v,\ p'_1,\ \ldots,\ p'_h,$$

ont leurs poids égaux et de signes contraires. D'après les suppositions admises relativement à $p'_1 = p_t$, la quantité $[\eta_{v+1}]$ a pour poids $-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_n$, et il n'existe dans la suite

$$[\eta_1],\ [\eta_2],\ \ldots,\ [\eta_r],$$

aucun terme qui ait, pour les indices $1, 2, \ldots, i-1, i$, les poids

$$-\pi_1,\quad -\pi_2,\quad \ldots,\quad -\pi_{i-1},\quad -\pi_i - \varepsilon,\quad (\varepsilon > 0).$$

D'autre part, les transformées de

$$[\eta_1],\ [\eta_2],\ \ldots,\ [\eta_r]$$

s'expriment linéairement au moyen de $[\eta_1], \ldots, [\eta_r]$ (*); on déduit facilement de là :

$$(i,\ i+1)\,[\eta_{v+1}] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(*) Voir le paragraphe 48.

Ces équations sont tout à fait analogues aux équations (2), et elles s'obtiennent de la même manière; elles prouvent que $[\eta_{v+1}]$ est un semi-covariant identique de seconde espèce (§ 41).

Or, tout semi-covariant identique de seconde espèce, qui a pour poids $-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_n$, se déduit de

$$x1_1^{\pi_1-\pi_2}(\pm x1_1 x2_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots (\pm x1_1 \ldots xn_n)^{\pi_n},$$

au moyen d'une opération polaire O_ν relative aux variables; nous aurons, d'après la formule (6) :

$$[\eta_{v+1}] = O_\nu [\theta_1],$$

et d'après l'équation (3') :

$$O_\nu [P_t] = [\eta_{v+1}] p'_1 + O_\nu [\theta_2] \cdot p'_2 + \cdots + O_\nu [\theta_h] \cdot p'_h. \tag{8}$$

On déduit des formules (7) et (8) :

$$[P] - O_\nu [P_t] = [\eta_1] p_1 + \cdots + [\eta_v] p_v + [\eta'_{v+2}] p'_2 + \cdots + [\eta'_2] p'_h,$$

en représentant par les lettres η' des fonctions analogues à $\eta_1, \eta_2, \ldots$.

La fonction invariante [P] est donc égale à la polaire $O_\nu [P_t]$ augmentée de la fonction invariante de poids zéro, $[P] - O_\nu [P_t]$, qui est exprimable au moyen de $r - 1$ termes *au plus* (*). De la même manière, $[P] - O_\nu [P_t]$ est la somme de deux fonctions invariantes : l'une est analogue à $O_\nu [P_t]$, l'autre est de poids zéro et est exprimable par $r - 2$ termes *au plus*. En continuant ainsi de suite, on trouvera que [P] *est une somme de polaires analogues à* $O_\nu [P_t]$.

La quantité [P] est la fonction invariante la plus générale, de poids zéro, relative aux variables $x1, x2, \ldots, xn$. La fonction

(*) Le plus petit nombre de termes nécessaires pour exprimer $[P] - O_\nu [P_t]$ est précisément égal à $r - h$; ce résultat n'étant pas actuellement essentiel, nous nous bornons à le signaler : on pourra l'établir, soit directement, soit comme application des propriétés que nous indiquerons dans la suite, pour les covariants primaires.

invariante $[P_t]$, qui est également de poids zéro, a pour source un semi-invariant p_t; $[P_t]$ est ainsi le produit de $(\pm x1_1\, x2_2 \dots xn_n)^{\pi_n}$ par un covariant primaire χ (voir § 46). La polaire $O_\nu\,[P_t]$ s'exprime comme somme de polaires de $(\pm x1_1\, x2_2 \dots xn)^{\pi_n}$, multipliées par des polaires de χ relatives aux variables (§ 3). Les polaires de $(\pm x1_1 x2_2 \dots xn_n)^{\pi_n}$ qui sont à considérer, doivent seulement contenir les variables $x1, x2, \dots xn$; elles ne diffèrent de $(\pm x1_1\, x2_2 \dots xn_n)^{\pi_n}$ que par des facteurs numériques. La fonction $O_\nu\,[P_t]$ est ainsi le produit de $(\pm x1_1\, x2_2 \dots xn_n)^{\pi_n}$ par une polaire de χ. D'après ces considérations, le dernier résultat que nous avons obtenu peut s'énoncer comme il suit : *Toute fonction invariante de poids zéro, aux variables* x1, x2, ..., xn, *est une somme de puissances du déterminant* $(\pm \mathrm{x}1_1\, \mathrm{x}2_2 \dots \mathrm{xn}_n)$ *multipliées par des polaires de covariants primaires* (*).

53. Soit φ_l, une fonction invariante de poids zéro, relative à des formes linéaires et aux variables $x1, x2, \dots, xn$; d'après le dernier théorème, nous pouvons écrire :

$$\varphi_l = \sum (\pm x1_1 x2_2 \dots xn_n)^m \,.\, O_\nu \chi_l, \tag{9}$$

en représentant par χ_l un covariant primaire et par O_ν une opération polaire relative aux variables $x1, x2, \dots, xn$.

Cela posé, désignons par $\mathfrak{P}$ un produit dont les facteurs sont de deux espèces : 1° des formes linéaires aux variables $y1$, $y2, \dots, yk$, différentes de $x1, x2, \dots, xn$; 2° des déterminants de formes linéaires, tels que $(\pm a_1\, b_2 \dots l_n)$.

Nous avons, d'après l'équation (9) :

$$\mathfrak{P} \,.\, \varphi_l = \sum (\pm x1_1 x2_2 \dots xn_n)^m \,.\, \mathfrak{P} \,.\, O_\nu \chi_l;$$

en prenant $\mathfrak{P} \,.\, \chi_l = \varphi'_l$, nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{P} \,.\, \varphi_l = \sum (\pm x1_1 x2_2 \dots xn_n)^m \,.\, O_\nu \varphi'_l, \tag{10}$$

(*) Pour abréger, nous comprenons sous la dénomination de *polaires* les polaires relatives aux variables.

puisque l'opération O_ν se rapporte seulement aux variables $x1, x2, \ldots, xn$.

La fonction φ'_l est du reste le produit d'un covariant primaire et de formes linéaires aux variables $y1, y2, \ldots, yk$.

En additionnant membre à membre, un nombre quelconque d'équations analogues à (10), on obtient :

$$\sum_1 \mathfrak{P} \cdot \varphi_l = \sum' (\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^m \cdot O_\nu \varphi'_l. \tag{11}$$

La quantité $\Sigma_1 \mathfrak{P}\varphi_l$ est une fonction invariante de poids positif ou nul, pour des formes linéaires : elle peut être considérée comme représentant symboliquement une fonction invariante quelconque, de poids positif ou nul, relative aux variables

$$x1, \quad x2, \quad \ldots, \quad xn, \quad y1, \quad y2, \quad \ldots, \quad yk.$$

La quantité φ'_l représente symboliquement, dans les mêmes conditions, une fonction invariante aux variables

$$x1, \quad x2, \quad \ldots, \quad xn-1, \quad y1, \quad y2, \quad \ldots, \quad yk,$$

et de poids positif ou nul.

A ce point de vue, l'équation (11) permet d'énoncer ce théorème : *Toute fonction invariante φ, de poids positif ou nul, et relative à*

$$x1, \quad x2, \quad \ldots, \quad xn, \quad y1, \quad y2, \quad \ldots, \quad yk,$$

est une somme de puissances de

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)$$

multipliées par des polaires de fonctions invariantes φ' indépendantes des variables xn *: chacune des fonctions φ' est représentée symboliquement par le produit φ'_l d'un covariant primaire et de formes linéaires aux variables* y1, y2, ..., yk.

54. Les fonctions invariantes φ' sont de poids positif ou nul; on peut donc leur appliquer le théorème précédent, moyennant un simple changement de notation.

Ainsi, les fonctions φ' sont des sommes de puissances de

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn-1_{n-1} y1_n)$$

multipliées par des polaires de fonctions invariantes φ'' aux variables

$$x1,\quad x2,\quad \ldots,\quad xn-1,\quad y2,\quad \ldots,\quad yk.$$

Par des réductions analogues, on obtiendra des séries de fonctions invariantes

$$\varphi'',\quad \ldots,\quad \varphi^{(i-1)},\quad \varphi^{(i)},\quad \ldots,\quad \varphi^{(k)},\quad \varphi^{(k+1)},$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

1° $\varphi^{(i)}$ est de poids positif ou nul et dépend des variables

$$x1,\quad x2,\quad \ldots,\quad xn-1,\quad yi,\quad yi+1,\quad \ldots,\quad yk;$$

2° $\varphi^{(i)}$ est une somme de puissances de

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn-1_{n-1} yi_n)$$

multipliées par des polaires de fonctions $\varphi^{(i+1)}$.

D'après le théorème établi au paragraphe précédent, $\varphi^{(k)}$ est réductible à des produits de puissances de

$$(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn-1_n yk_n)$$

et de polaires de covariants primaires.

D'après ces différentes considérations, toute fonction invariante φ, de poids positif ou nul, est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires. La fonction invariante la plus générale est une somme de produits de covariants identiques et de fonctions invariantes de poids positif ou nul (§ 38, *Rem.* III); conséquemment, *une fonction invariante quelconque est exprimable comme somme de covariants identiques, multipliés par des polaires de covariants primaires relatives aux variables.*

Remarques. — I. Pour des formes algébriques binaires, les covariants primaires sont les fonctions invariantes à une seule série de variables (§ 46); pour ce cas particulier, on retrouve le théorème de réduction qui a été établi par Clebsch et M. Gordan au moyen de considérations d'un ordre différent (*).

II. On retrouve encore par notre résultat l'important théorème qui a été obtenu par M. Capelli : « toutes les fonctions invariantes de formes à séries de n variables sont des sommes de produits de covariants identiques par des polaires de fonctions invariantes à $n - 1$ séries de n variables » (**).

Exemple. — Dans le cas de $n > 4$, la fonction invariante

$$\varphi = (\pm\, a_{x2} d_{x4})(\pm\, b_{x1} c_{x3})$$

est exprimable, au moyen de covariants primaires χ, d'après la formule

$$\varphi = \Omega_1 \chi 1 + \Omega_2 \chi 2 - \chi 3;$$

on a :

$$\chi 1 = (\pm\, a_{x1} d_{x2})(\pm\, b_{x1} c_{x2}),$$

$$\chi 2 = a_{x1}(\pm\, d_{x1} b_{x2} c_{x3}) - d_{x1}(\pm\, a_{x1} b_{x2} c_{x3}),$$

$$\chi 3 = \frac{1}{6}(\pm\, a_{x1} b_{x2} c_{x3} d_{x4});$$

(*) Gordan, *Mathematische Annalen,* t. III, et *Vorlesungen über Invariantentheorie,* t. II, p. 86; Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* p. 26.

(**) *Fondamenti di una teoria generale de forme algebriche,* § 74 (*Mem. dei Lincei,* 1882).

[Dans un Mémoire antérieur, publié au *Giornale di Mathematiche,* t. XVIII, M. Capelli a étudié les fonctions invariantes à variables ternaires ($n=3$); le produit $a^{\mu}_{x1}\, b^{\nu}_{x2}\, c_{x3}$ s'y trouve réduit aux covariants primaires en $x1$, $x2$ et à des fonctions invariantes aux variables $x1$, $x2$, $x3$ qui sont divisibles par $(\pm\, x1_1 x2_2 x3_3)$; quant aux fonctions invariantes ternaires quelconques, la réduction s'effectue par voie de récurrence. C'est seulement pendant l'impression de notre Mémoire actuel que nous avons eu connaissance des recherches que le savant Géomètre italien a publiées au *Journal de Battaglini.*]

les caractéristiques Ω représentent les opérations polaires

$$\Omega_1 = \frac{1}{6}\left[\left(x2\frac{d}{dx1}\right)\left(x3\frac{d}{dx2}\right)\left(x4\frac{d}{dx2}\right) - \left(x3\frac{d}{dx2}\right)\left(x4\frac{d}{dx1}\right)\right],$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{4}\left[\left(x4\frac{d}{dx1}\right) - \left(x2\frac{d}{dx1}\right)\left(x4\frac{d}{dx2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(x3\frac{d}{dx1}\right)\left(x2\frac{d}{dx3}\right)\left(x4\frac{d}{dx2}\right)\right].$$

55. *Application.* — Les formes algébriques $f, f_1, \ldots$ étant des fonctions invariantes, peuvent s'écrire :

$$f = \Omega_1\chi_1 + \Omega_2\chi_2 + \cdots + \Omega_t\chi t,$$

$$f_1 = \Omega'_1\chi'_1 + \cdots, \text{ etc.},$$

si l'on désigne par $\Omega\chi$ une somme de produits de covariants identiques et de polaires d'un covariant primaire χ relativement aux variables. Toute fonction invariante φ de $f, f_1, \ldots,$ est une somme de fonctions invariantes des termes

$$\Omega_1\chi 1, \quad \Omega_2\chi 2, \quad \ldots, \quad \Omega_t\chi t, \quad \Omega'_1\chi' 1, \quad \ldots,$$

considérés comme formes algébriques (§ 14, *Applic.*). Conséquemment, φ est une somme de fonctions invariantes des covariants primaires

$$\chi^1, \quad \chi^2, \quad \ldots, \quad \chi^t, \quad \chi'^1, \quad \ldots,$$

considérés commes des formes algébriques proprement dites; la réciproque est du reste évidente, si l'on observe que les coefficients de $\chi^1, \ldots,$ s'expriment linéairement au moyen des coefficients de $f, f_1, \ldots$.

Les covariants primaires $\chi^1, \chi^2, \ldots,$ contiennent les seules séries de variables $x1, x2, \ldots, xn - 1$; d'autre part, les fonctions invariantes de formes algébriques sont réductibles aux covariants primaires. Par suite, *toutes les fonctions invariantes des formes* f, $f_1, \ldots,$ *peuvent s'obtenir au moyen des covariants primaires de* $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t, \chi'_1 \ldots$, *si l'on considère* $\chi^1, \chi^2, \ldots,$ *comme des formes algébriques aux séries de variables* $x1, x2, \ldots, xn - 1$.

Réduction des covariants primaires (*).

56. D'après les résultats indiqués ci-dessus, les covariants primaires sont les fonctions invariantes qu'il importe le plus de considérer. Nous établirons que ces fonctions fondamentales s'expriment comme sommes de produits et de puissances d'un nombre limité d'entre elles. Nous prendrons comme point de départ un remarquable théorème, qui a été établi récemment par M. HILBERT (**), et qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit donné une suite illimitée de polynômes $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}, \ldots$, *homogènes par rapport à* k *quantités* $v_1, v_2, \ldots, v_k$; *il existe toujours un nombre* ρ *tel que toute fonction de la suite* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$, *peut s'écrire*

$$\mathcal{F}_r = \gamma_{r1}\mathcal{F}_1 + \gamma_{r2}\mathcal{F}_2 + \cdots + \gamma_{r\rho}\mathcal{F}_\rho,$$

$\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \ldots, \gamma_{r\rho}$ *étant des polynômes homogènes par rapport à* $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

La démonstration suivante est à peu près la reproduction de celle qui a été indiquée par le savant Auteur.

Si l'on suppose $k = 1$, le théorème est évident, puisque les polynômes $\mathcal{F}$ se réduisent à des puissances de v_1 multipliées par des constantes.

Il suffira donc d'établir la proposition énoncée, en la supposant exacte pour des polynômes à $k - 1$ variables.

Soit q le degré du premier polynôme $\mathcal{F}$; on peut remplacer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ par des combinaisons linéaires d'autres quantités indépendantes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, de telle manière que la nouvelle expression de $\mathcal{F}_1$ contienne le terme ν_1^q.

(*) J. DERUYTS, *Sur la réduction des fonctions invariantes* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 3e série, t. XX).

(**) D. HILBERT, *Zur Theorie der algebraischen Gebilde* (NACHRICHTEN DE GOETTINGUE, 1888, p. 450. Voir aussi *Mathematische Annalen*, t. XXXVI, p. 473).

Désignons par $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$, la suite des polynômes $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$, rapportés aux quantités $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$; le résultat qu'il s'agit d'obtenir se trouvera établi, s'il existe un nombre ρ tel que l'on ait :

$$\mathcal{G}_r = \gamma'_{r1}\mathcal{G}_1 + \gamma'_{r2}\mathcal{G}_2 + \cdots + \gamma'_{r\rho}\mathcal{G}_\rho. \tag{1}$$

Puisque l'on a

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_1 = \varepsilon\nu_1^q + \cdots, \quad (\varepsilon \gtrless 0),$$

on peut écrire :

$$\mathcal{G}_r = \gamma'_r\mathcal{G}_1 + \mathcal{R}_r^0, \tag{2}$$

$$\mathcal{R}_r^0 = \nu_1^{q-1}\lambda_{r1} + \nu_1^{q-2}\lambda_{r2} + \cdots + \lambda_{r,q},$$

en représentant par γ' et par λ des fonctions entières et homogènes de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, et de $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k$.

Soient

$$\lambda_{t1,1}, \quad \lambda_{t2,1}, \quad \ldots,$$

les termes de la suite $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots$ qui sont différents de zéro; le théorème de M. Hilbert étant supposé exact pour des polynômes à $k - 1$ variables, il existe un nombre t_ρ tel que l'on ait :

$$\lambda_{tr,1} = \mathcal{L}_{tr}(\lambda_{t1,1}, \ \lambda_{t2,1}, \ \ldots, \ \lambda_{t\rho,1}); \tag{3}$$

dans cette formule et dans les formules suivantes, la caractéristique $\mathcal{L}$ désignera une somme de polynômes homogènes par rapport à $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k$, multipliés respectivement par les fonctions comprises sous le signe $\mathcal{L}$.

Si l'on prend $t_\rho = t$, on obtient par la formule (3) :

$$\lambda_{r,1} = \mathcal{L}_r(\lambda_{11}, \ \lambda_{21}, \ \ldots, \ \lambda_{t,1}),$$

puis :

$$\mathcal{R}_r^0 - \mathcal{L}_r(\mathcal{R}_1^0, \ \mathcal{R}_2^0, \ \ldots, \ \mathcal{R}_t^0) = \nu_1^{q-2}\lambda'_{r2} + \cdots + \lambda'_{r,q}.$$

On peut appliquer aux polynômes

$$\mathcal{R}'_r = \mathcal{R}_r^0 - \mathcal{L}_r(\mathcal{R}_1^0, \ \ldots, \ \mathcal{R}_t^0),$$

les considérations qui viennent d'être indiquées pour les polynômes $\mathfrak{R}^0$; par conséquent, il existe un nombre t_1 tel que l'on ait :

$$\mathfrak{R}''_r = \mathfrak{R}'_r - \mathfrak{L}'_r(\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \ldots, \mathfrak{R}'_{t_1})$$

$$= \nu_1^{q-3}\lambda''_{r3} + \cdots + \lambda''_{r,q}, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

En continuant ainsi de suite, on obtiendra des systèmes de polynômes

$$\mathfrak{R}_1^{(i)}, \quad \mathfrak{R}_2^{(i)}, \quad \ldots \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

déterminés par les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_r^{(i)} &= \mathfrak{R}_r^{(i-1)} - \mathfrak{L}_r^{(i-1)}\left(\mathfrak{R}_1^{(i-1)}, \mathfrak{R}_2^{(i-1)}, \ldots, \mathfrak{R}_{t_{i-1}}^{i-1}\right) \\ &= \nu_1^{q-i-1}\lambda_{r,i+1}^{(i)} + \cdots + \lambda_{r,q}^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

t_{i-1} étant un nombre égal ou supérieur à t_{i-2}. Dans le cas de $i = q$, on a $\mathfrak{R}_r^{(i)} = 0$ et on obtient d'après les équations (4) :

$$\mathfrak{R}_r^0 = \mathfrak{L}_r(\mathfrak{R}_1^0, \mathfrak{R}_2^0, \ldots, \mathfrak{R}_t^0) + \mathfrak{L}'_r\left(\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \ldots, \mathfrak{R}'_{t_1}\right)$$
$$+ \mathfrak{L}''_r\left(\mathfrak{R}''_1, \mathfrak{R}''_2, \ldots, \mathfrak{R}''_{t_2}\right) + \cdots + \mathfrak{L}_r^{(q-1)}\left(\mathfrak{R}_1^{(q-1)}, \ldots, \mathfrak{R}_{t_{q-1}}^{(q-1)}\right).$$

On déduit encore des équations (4) que

$$\mathfrak{R}_1^0, \quad \mathfrak{R}_2^0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_t^0, \quad \mathfrak{R}'_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_{t_{q-1}}^{(q-1)}$$

s'expriment comme sommes des quantités

$$\mathfrak{R}_1^0, \quad \mathfrak{R}_2^0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_{t_{q-1}}^0$$

multipliées par des polynômes aux variables $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k$; on écrira donc :

$$\mathfrak{R}_r^0 = \mathfrak{L}_r^0(\mathfrak{R}_1^0, \mathfrak{R}_2^0, \ldots, \mathfrak{R}_\rho^0),$$

en posant $t_{q-1} = \rho$. De la dernière équation et de la formule (2), on déduit :

$$\mathfrak{G}_r = \gamma'_{r1}\mathfrak{G}_1 + \gamma'_{r2}\mathfrak{G}_2 + \cdots + \gamma'_{r\rho}\mathfrak{G}_\rho :$$

c'est la relation (1) qu'il s'agissait d'obtenir.

57. Au moyen du théorème de M. Hilbert, nous démontrerons que pour un système donné de formes algébriques, tous les semi-invariants sont fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux.

Soient :

$$\left.\begin{array}{l} a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha 1_n;\ \alpha 2_1 \ldots \alpha 2_n;\ \ldots} \equiv a1_1^{\alpha 1_1} \ldots a1_n^{\alpha 1_n} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots a2_n^{\alpha 2_n} \ldots \\ \qquad \equiv a'1_1^{\alpha 1_1} \ldots a'1_n^{\alpha 1_n} a'2_1^{\alpha 2_1} \ldots a'2_n^{\alpha 2_n} \ldots \equiv \cdots;\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (5)$$

les équations symboliques des coefficients de formes à séries de n variables;

$$a1, \quad a2, \quad \ldots; \quad a'1, \quad a'2, \quad \ldots; \text{ etc.},$$

sont des systèmes de symboles équivalents; on a

$$\alpha 1_1 + \alpha 1_2 + \cdots + \alpha 1_n = \alpha 1, \quad \alpha 2_1 + \alpha 2_2 + \cdots + \alpha 2_n = \alpha 2, \text{ etc.},$$

$\alpha 1$, $\alpha 2$ ... étant des constantes.

Tout semi-invariant ψ a pour expression symbolique normale une somme de produits de déterminants δ_i, d'ordre $i = 1, 2, \ldots, n$, tels que

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_i \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_i \end{vmatrix},$$

les lettres $a, b, \ldots, l$ désignant des coefficients symboliques quelconques; nous écrirons en conséquence :

$$\psi \equiv \sum \Pi \delta_i.$$

Prenons

$$\varepsilon_i = \frac{i(i-1)}{2}, \quad \mu = \frac{n(n+1)}{2}$$

et remplaçons les déterminants δ_i par les déterminants correspondants

$$\delta'_i = \begin{vmatrix} a_{\varepsilon_i+1} & a_{\varepsilon_i+2} & \ldots & a_{\varepsilon_i+i} \\ b_{\varepsilon_i+1} & b_{\varepsilon_i+2} & \ldots & b_{\varepsilon_i+i} \\ . & . & . & . \\ l_{\varepsilon_i+1} & l_{\varepsilon_i+2} & \ldots & l_{\varepsilon_i+i} \end{vmatrix}.$$

Soient

$$\mathcal{P} = a1_1^{\mathcal{A}1_1} a1_2^{\mathcal{A}1_2} \dots a1_\mu^{\mathcal{A}1_\mu} a2_1^{\mathcal{A}2_1} \dots a2_\mu^{\mathcal{A}2_\mu} \dots,$$

les produits de coefficients $a1$, $a2$, ..., qui sont contenus linéairement dans la fonction $\Sigma\Pi\delta'_i$; nous aurons :

$$\mathcal{A}1_1 + \mathcal{A}1_2 + \dots + \mathcal{A}1_\mu = \alpha 1, \quad \mathcal{A}2_1 + \dots + \mathcal{A}2_\mu = \alpha 2, \text{ etc.},$$

et des relations toutes semblables entre les exposants des produits analogues à $\mathcal{P}$.

La quantité $\Sigma\Pi\delta'_i$ peut être considérée comme représentant symboliquement une fonction g des coefficients

$$a_{\mathcal{A}1_1 \dots \mathcal{A}1_\mu,\ \mathcal{A}2_1 \dots \mathcal{A}2_\mu \dots}, \text{ etc.}$$

de formes à plusieurs séries de μ variables, telles que $z_1, z_2, \dots, z_\mu$; nous écrirons à cet effet :

$$\left.\begin{aligned} & a_{\mathcal{A}1_1 \dots \mathcal{A}1_\mu,\ \mathcal{A}2_1 \dots \mathcal{A}2_\mu \dots} \\ & \equiv a1_1^{\mathcal{A}1_1} \dots a1_\mu^{\mathcal{A}1_\mu} a2_1^{\mathcal{A}2_1} \dots a2_\mu^{\mathcal{A}2_\mu} \dots \\ & \equiv a'1_1^{\mathcal{A}1_1} \dots a'1_\mu^{\mathcal{A}1_\mu} a'2_1^{\mathcal{A}2_1} \dots a'2_\mu^{\mathcal{A}2_\mu} \dots \equiv \cdots, \text{ etc.,} \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

et nous ferons correspondre les équations symboliques (5) et (5′).

La quantité g est une fonction algébrique entière et homogène par rapport aux différentes séries de quantités

$$a_{\mathcal{A}1_1 \dots \mathcal{A}1_\mu \dots}, \quad \text{etc.},$$

parce que le semi-invariant ψ est homogène par rapport aux séries correspondantes de coefficients $a_{\alpha 1_1 . \alpha 1_2 \dots}$, etc. Les expressions symboliques $\Sigma\Pi\delta_i$ et $\Sigma\Pi\delta'_i$ sont simultanément isobariques; par conséquent, la fonction effective g est isobarique.

D'après la relation qui existe entre les expressions symboliques $\Sigma\Pi\delta_i$ et $\Sigma\Pi\delta'_i$, on réduit la fonction g à ψ, si l'on remplace chacune des séries de quantités telles que

$$a_{\mathcal{A}1_1 \dots \mathcal{A}1_\mu,\ \mathcal{A}2_1 \dots \mathcal{A}2_\mu,\ \dots}$$

par les coefficients

$$a_{\alpha 1_1 \dots \alpha 1_n,\ \alpha 2_1 \dots \alpha 2_n,\ \dots},$$

déterminés par les équations

$$\alpha_i = \mathcal{A}_{\varepsilon_i + i} + \mathcal{A}_{\varepsilon_{i+1}+i} + \cdots + \mathcal{A}_{\varepsilon_n + i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous conviendrons de désigner par la caractéristique g, toute fonction homogène et isobarique des coefficients

$$a_{\mathcal{A}1_1 \dots \mathcal{A}1_\mu \dots} \text{ etc.,}$$

qui est représentée symboliquement par une expression analogue à $\Sigma\,\Pi \delta_i^{\prime}$.

Ainsi, tout semi-invariant ψ correspond à une fonction $g \equiv \Sigma\,\Pi\delta_i^{\prime}$ et réciproquement; en outre, toute relation entre les fonctions g donne lieu à la relation analogue entre les semi-invariants ψ correspondants. On établira donc que les semi-invariants ψ sont des fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux, en prouvant que les fonctions g sont des sommes de produits d'un nombre limité d'entre elles.

58. Les fonctions g sont des polynômes homogènes par rapport à des quantités $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ qui sont les coefficients

$$a_{\mathcal{A}1_1 \mathcal{A}1_2 \dots \mathcal{A}1_\mu,\ \mathcal{A}2_1 \dots \mathcal{A}2_\mu, \dots}, \text{ etc.}$$

Considérons la suite $g_1, g_2, \dots, g, \dots$, des fonctions g rangées par ordre de degré croissant ou non décroissant (*). D'après le théorème de M. Hilbert, on pourra écrire :

$$g_r = \gamma_{r1} g_1 + \gamma_{r2} g_2 + \cdots + \gamma_{r\rho} g_\rho; \tag{6}$$

ρ est un nombre indépendant de la valeur de r; $\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \dots, \gamma_{r\rho}$ sont des fonctions entières de $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$.

(*) Nous ne comprenons pas, parmi les fonctions g, les constantes numériques.

Nous avons considéré $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, comme les coefficients de formes à plusieurs séries de μ variables telles que $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$: effectuons, sur les variables dont il s'agit, la substitution linéaire

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha'_{11} Z_1 + \alpha'_{12} Z_2 + \cdots + \alpha'_{1\mu} Z_\mu, \\ z_2 &= \alpha'_{21} Z_1 + \alpha'_{22} Z_2 + \cdots + \alpha'_{2\mu} Z_\mu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\mu &= \alpha'_{\mu 1} Z_1 + \alpha'_{\mu 2} Z_2 + \cdots + \alpha'_{\mu\mu} Z_\mu; \end{aligned}$$

en désignant par G et par Γ, les transformées des fonctions g et γ, nous aurons, d'après la formule (6) :

$$G_r = \Gamma_{r1} G_1 + \Gamma_{r2} G_2 + \cdots + \Gamma_{r\rho} G_\rho.$$

Remplaçons dans cette équation les quantités

$$\alpha'_{i1}, \quad \alpha'_{i2}, \quad \ldots, \quad \alpha'_{i\mu},$$

par les variables

$$z1_i, \quad z2_i, \quad \ldots, \quad z\mu_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu);$$

nous obtenons :

$$[G_r] = [\Gamma_{r1}][G_1] + [\Gamma_{r2}][G_2] + \cdots + [\Gamma_{r\rho}][G_\rho], \tag{7}$$

en indiquant par [G] et par $[\Gamma]$, les fonctions invariantes, de poids zéro, aux μ séries de variables $z1, z2, \ldots, z\mu$, qui ont pour sources les quantités g et γ (voir § 44) (*).

D'après la formule

$$g = \sum \Pi \delta_i^{\gamma} = \sum \Pi \begin{vmatrix} a_{\varepsilon_i+1} & a_{\varepsilon_i+2} & \cdots & a_{\varepsilon_i+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{\varepsilon_i+1} & l_{\varepsilon_i+2} & \cdots & l_{\varepsilon_i+i} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

(*) La source est actuellement le coefficient des plus hautes puissances de $z1_1, z2_2, \ldots, z\mu_\mu$.

on a :

$$[G] \equiv \sum \Pi \begin{vmatrix} a_{\overline{z\varepsilon_i+1}} & a_{\overline{z\varepsilon_i+2}} & \cdots & a_{\overline{z\varepsilon_i+i}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{\overline{z\varepsilon_i+1}} & l_{\overline{z\varepsilon_i+2}} & \cdots & l_{\overline{z\varepsilon_i+i}} \end{vmatrix}. \qquad (8')$$

Soit q_i, le degré de la fonction $[G_r]$ par rapport à chacune des séries de variables comprises dans le groupe

$$\overline{z\varepsilon_i+1}, \quad \overline{z\varepsilon_i+2}, \quad \ldots, \quad \overline{z\varepsilon_i+i},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Appliquons aux deux membres de l'équation (7), l'opération

$$D = \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1}} & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+2}} & \cdots & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+i}} \\ \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+1}} & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+2}} & \cdots & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+i}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+1}} & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+2}} & \cdots & \dfrac{d}{d\overline{z\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+i}} \end{vmatrix}^{q_i};$$

nous obtenons immédiatement (*)

$$D[G_r] = D[\Gamma_{r1}][G_1] + D[\Gamma_{r2}][G_2] + \cdots + D[\Gamma_{r\rho}][G_\rho]. \qquad (9)$$

(*) Si l'on suppose $n = 3$, la fonction g est représentée symboliquement par une somme de produits de déterminants tels que

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a'_2 & a'_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a''_4 & a''_5 & a''_6 \\ b'_4 & b'_5 & b'_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix};$$

on a

$$D = \left(\frac{d}{dz1_1}\right)^{q_1} \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dz2_2} & \dfrac{d}{dz2_3} \\ \dfrac{d}{dz3_2} & \dfrac{d}{dz3_3} \end{vmatrix}^{q_2} \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dz4_4} & \dfrac{d}{dz4_5} & \dfrac{d}{dz4_6} \\ \dfrac{d}{dz5_4} & \dfrac{d}{dz5_5} & \dfrac{d}{dz5_6} \\ \dfrac{d}{dz6_4} & \dfrac{d}{dz6_5} & \dfrac{d}{dz6_6} \end{vmatrix}^{q_3}.$$

59. Nous rechercherons séparément les valeurs de **D** $[G_r]$ et de **D** $[\Gamma_{rj}]\,[G_j]$.

1° La fonction **D** $[G_r]$ est égale à **D** $[G_r]'$, si l'on désigne par $[G_r]'$ l'ensemble des termes de $[G_r]$ qui contiennent seulement les variables

$$\begin{array}{llll} z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1}, & z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+2}, & \ldots, & z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+i}, \\ z\overline{\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+1}, & z\overline{\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+2}. & \ldots, & z\overline{\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+i}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z\overline{\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+1}, & z\overline{\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+2}, & \ldots, & z\overline{\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+i}. \end{array}$$

D'après les formules (8) et (8′) on a :

$$[G_r]' = g_r \prod_{i=1}^{n} \left(\pm\, z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1} \quad z\overline{\varepsilon_i+2}_{\varepsilon_i+2} \quad \ldots \quad z\overline{\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+i}\right)^{q_i}$$

et par suite

$$D\,[G_r] = g_r\,.\,D \prod_{i=1}^{n} \left(\pm\, z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1} \quad \ldots \quad z\overline{\varepsilon_i+i}_{\varepsilon_i+i}\right)^{q_i}. \tag{10}$$

Si l'on écrit

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\pm\, z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1} \,..\right)^{q_i} = \sum \eta z1_1^{\alpha} z2_2^{\beta} z2_3^{\gamma} \ldots,$$

η étant un facteur numérique, l'opération **D** est représentée par

$$D = \sum \eta \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}{dz1_1^{\alpha}\, dz2_2^{\beta}\, dx2_3^{\gamma} \ldots};$$

la quantité

$$D\,.\prod_{i=1}^{n} \left(\pm\, z\overline{\varepsilon_i+1}_{\varepsilon_i+1} \ldots\right)^{q_i}$$

a pour valeur

$$\sum \eta^2.\ \alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \ldots,$$

c'est-à-dire une constante numérique ζ différente de zéro. On a donc par la formule (10) :

$$D\,[G_r] = \zeta g_r.$$

2° La fonction $D[\Gamma_j][G_j]$ étant égale à $D[\Gamma_j][G_j]'$, contient comme facteur la quantité g_j.

D'autre part, la fonction invariante $[\Gamma_j][G_j]$ est de poids zéro et de degré q_i pour les séries de μ variables

$$z\overline{\varepsilon_i+1},\quad z\overline{\varepsilon_i+2},\quad \ldots,\quad z\overline{\varepsilon_i+i};$$

on peut donc écrire symboliquement :

$$[\Gamma_j][G_j] \equiv O_c \prod_{i=1}^{n} \left\{ a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,z\overline{\varepsilon_i+1}} \quad a\overline{\varepsilon_i+2}_{\,z\overline{\varepsilon_i+2}} \quad \ldots \quad a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,z\overline{\varepsilon_i+i}} \right\}^{q_i},$$

O_c désignant une opération polaire relative aux coefficients (§ 39). On obtient dès lors :

$$D[\Gamma_j][G_j] \equiv O_c D \prod_{i=1}^{n} \left\{ a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,z\overline{\varepsilon_i+1}} \quad \ldots \quad a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,z\overline{\varepsilon_i+i}} \right\}^{q_i},$$

si l'on observe que les opérations O_c, D se rapportent à des éléments différents.

En considérant seulement les variables relatives à D, on écrira :

$$D[\Gamma_j][G_j] \equiv \zeta'.\, O_c\nabla, \tag{11}$$

$$\nabla = \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,\varepsilon_i+1} & a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,\varepsilon_i+2} & \ldots & a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,\varepsilon_i+i} \\ a\overline{\varepsilon_i+2}_{\,\varepsilon_i+1} & a\overline{\varepsilon_i+2}_{\,\varepsilon_i+2} & \ldots & a\overline{\varepsilon_i+2}_{\,\varepsilon_i+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,\varepsilon_i+1} & a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,\varepsilon_i+2} & \ldots & a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,\varepsilon_i+i} \end{vmatrix}^{q_i}.$$

La polaire $O_c\nabla$, qui est relative aux coefficients, est une somme de produits de polaires des facteurs

$$\nabla_i = \left(\pm\, a\overline{\varepsilon_i+1}_{\,\varepsilon_i+1} \quad a\overline{\varepsilon_i+2}_{\,\varepsilon_i+2} \ldots a\overline{\varepsilon_i+i}_{\,\varepsilon_i+1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

toute polaire de ∇_i est un déterminant analogue à

$$\delta'_i = \left(\pm\, a_{\varepsilon_i+1}\; b_{\varepsilon_i+2} \ldots l_{\varepsilon_i+i}\right);$$

par conséquent, $O_c\nabla$ est une somme de produits de déterminants, telle que $\Sigma\Pi\delta'_i$: il en est de même de l'expression symbolique de D $[\Gamma_j]$ $[G_j]$, d'après la formule (11). Ainsi, D $[\Gamma_{rj}]$ $[G_j]$ est une fonction g_j^0 comprise parmi celles qui ont été désignées par la caractéristique g : et comme nous l'avons vu, g_j^0 contient comme facteur, la fonction g_j.

60. D'après les considérations précédentes, l'équation (9) peut s'écrire :

$$\zeta g_r = g_1^0 + g_2^0 + \cdots + g_\rho^0.$$

Nous déduisons de là, une relation entre les semi-invariants ψ de formes à séries de n variables, en tenant compte de la réduction des fonctions g aux semi-invariants ψ (§ 57).

Soient

$$\psi_r, \quad \psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_\rho, \quad \psi_1^0, \quad \psi_2^0, \quad \ldots, \quad \psi_\rho^0,$$

les déterminations de ψ qui correspondent aux déterminations

$$g_r, \quad g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\rho, \quad g_1^0, \quad g_2^0, \quad \ldots, \quad g_\rho^0$$

de g ; nous aurons :

$$\zeta\psi_r = \psi_1^0 + \psi_2^0 + \cdots + \psi_\rho^0.$$

Puisque g_r est la fonction g la plus générale, ψ_r est un semi-invariant tout à fait quelconque du système considéré de formes à séries de n variables.

D'autre part, la fonction g_j^0 étant divisible par g_j, on a

$$\psi_j^0 = \zeta \cdot \psi_j \cdot \psi_j'$$

et le facteur ψ_j' est nécessairement un semi-invariant. On a ainsi :

$$\psi_r = \psi_1'\psi_1 + \psi_2'\psi_2 + \cdots + \psi_\rho'\psi_\rho; \tag{12}$$

dans cette formule, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$ désignent des semi-invariants indépendants de la détermination de ψ_r.

Les semi-invariants $\psi_1', \psi_2', \ldots, \psi_\rho'$ se rapportent aux mêmes éléments que ψ_r, mais ils les contiennent à des degrés moindres. On peut appliquer à chacune des fonctions ψ_j', une réduction analogue à celle que la formule (12) exprime pour ψ_r. En continuant de même, on trouvera que *tout semi-invariant* ψ_r *est une fonction entière de* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$.

Les covariants primaires ont pour *sources* les semi-invariants; et les relations qui ont lieu entre les sources donnent lieu aux relations analogues entre les covariants (§ 43, Cor. III). Par conséquent, *tout covariant primaire d'un système de formes algébriques quelconques est une somme de produits et de puissances d'un nombre limité de covariants primaires du système.*

Cas particuliers. — I. Les covariants primaires indépendants des variables sont les invariants (§ 46, *Rem.* I); par suite, les invariants d'un système de formes sont fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux. Ce résultat a été obtenu par M. Hilbert (*).

II. Dans le cas de formes binaires, les covariants primaires sont les fonctions invariantes à une seule série de variables; on retrouve donc ce théorème qui est dû à M. Gordan : « pour les formes binaires, les covariants à une série de variables sont fonctions entières d'un nombre limité d'entre eux » (**).

61. Toutes les fonctions invariantes sont des sommes de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires.

Les covariants identiques se déduisent des puissances de $(\pm x_1 x_2 \ldots xn_n)$ par des opérations polaires (§ 41). D'après la réduction des covariants primaires, *les fonctions invariantes d'un système de formes algébriques se déduisent d'un nombre limité d'entre elles au moyen d'additions, de multiplications et d'opérations polaires relatives aux variables.*

(*) *Nachrichten de Gœttingue*, année 1888, p. 452; *Mathematische Annalen*, t. XXXVI, pp. 521 à 531.

(**) Le théorème de M. Gordan a été établi de diverses manières. Voir : Gordan, *Journal de Crelle*, t. LXIX; *Mathematische Annalen*, t. II; *Vorlesungen...*, t. II; Clebsch, *Theorie der binären Formen;* Mertens, *Journal de Crelle*, t. C, et *Sitzungsb. der kaiserl. Akad. zu Wien*, 1889; Hilbert, *Mathematische Annalen*, t. XXXV.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES COVARIANTS PRIMAIRES (*).

Équations aux dérivées partielles des covariants primaires.

62. Par définition, les covariants primaires sont les fonctions invariantes, à $n - 1$ séries de n variables, qui ont pour sources les semi-invariants : ils peuvent être représentés symboliquement par une somme de produits de déterminants analogues à

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{x1} & a_{x2} & \dots & a_{xi} \\ b_{x1} & b_{x2} & \dots & b_{xi} \\ . & . & . & . \\ h_{x1} & h_{x2} & \dots & h_{xi} \end{vmatrix},$$

i ayant les valeurs $1, 2, \dots, n - 1$. Par suite, *les covariants primaires* χ *satisfont aux équations*

$$x1 \frac{d}{dx2} \chi = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} \chi = 0, \quad \dots, \quad xn - 2 \frac{d}{dxn - 1} \chi = 0.$$

Réciproquement, *une fonction invariante* φ, *aux* $\mathrm{n} - 1$ *séries de variables* $\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \dots, \mathrm{xn} - 1$, *est un covariant primaire, si elle satisfait aux* $\mathrm{n} - 2$ *équations*

$$x1 \frac{d}{dx2} \varphi = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} \varphi = 0, \quad \dots, \quad xn - 2 \frac{d}{dxn - 1} \varphi = 0.$$

(*) J. Deruyts, *Sur la loi de formation des fonctions invariantes*, p. 4 (Mém. couronnés et Mém. des sav. étr. publiés par l'Acad. de Belgique, t. LI, in-4°); *Sur les fonctions semi-invariantes* (Bull. de l'Acad. de Belgique, 3e série, t. XIX); *Sur les covariants primaires* (Ibid., t. XX).

Observons d'abord que le poids π de la fonction invariante φ ne peut pas être négatif (§ 38, *Rem.* I); le produit

$$\varphi' = \varphi \,.\, (\pm\, x1_1\, x2_2 \dots xn_n)^{\pi}$$

est, par suite, une fonction invariante de poids zéro, qui a pour source la source φ^0 de φ. D'après les conditions de l'énoncé, on a les $n - 1$ équations

$$x1 \frac{d}{dx2} \varphi' = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} \varphi' = 0, \quad \dots, \quad xn-1 \frac{d}{dxn} \varphi' = 0. \qquad (1)$$

Soit φ'_s l'expression symbolique normale de φ'; la fonction φ'_s est une somme de produits de formes linéaires telles que

$$a_{x1}, \quad b_{x1}, \quad \dots, \quad a_{x2}, \quad b_{x2}, \quad \dots, \quad a_{xn}, \quad b_{xn}, \quad \dots; \qquad (2)$$

l'expression symbolique normale φ^0_s de la source φ^0 s'obtiendra au moyen de φ'_s, en remplaçant les formes (2) par les coefficients correspondants

$$a_1, \quad b_1, \quad \dots, \quad a_2, \quad b_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad b_n, \quad \dots$$

D'après les équations (1) et d'après les propriétés des expressions symboliques normales (§ 7), on obtient :

$$xi \frac{d\varphi'_s}{dxi+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

ou encore

$$a_{xi} \frac{d\varphi'_s}{da_{xi+1}} + b_{xi} \frac{d\varphi'_s}{db_{xi+1}} + \dots = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Remplaçons dans ces équations les formes

$$a_{x1}, \quad b_{x1}, \quad \dots, \quad a_{x2}, \quad b_{x2}, \quad \dots, \quad a_{xn}, \quad b_{xn}, \quad \dots,$$

par les coefficients

$$a_1, \quad b_1, \quad \dots, \quad a_2, \quad b_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad b_n, \quad \dots;$$

nous devrons remplacer en même temps φ'_s par φ^0_s et nous obtiendrons

$$a_i \frac{d\varphi^0_s}{da_{i+1}} + b_i \frac{d\varphi^0_s}{db_{i+1}} + \cdots = 0, \quad (i = 1, 2, .., n - 1),$$

ou encore

$$(i + 1, i)\, \varphi^0_s = 0.$$

Il résulte de là que la source $\varphi^0 \equiv \varphi^0_s$ du covariant φ satisfait aux équations

$$(i + 1, i)\, \varphi^0 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Par conséquent, φ^0 est un semi-invariant et φ est un covariant primaire.

63. *Application.* — Soient $m1, m2, \ldots, mn - 1$ les degrés d'un covariant primaire χ par rapport aux séries de variables $x1, x2, \ldots, xn - 1$. D'après l'expression symbolique de χ qui a été rappelée ci-dessus, *le covariant primaire χ ne contient qu'un seul produit*

$$x1_1^{m1} x2_2^{m2} \ldots xn - 1_{n-1}^{mn-1}$$

formé au moyen des variables du tableau triangulaire

$$\left.\begin{array}{lllll} x1_1 & & & & \\ x2_1 & x2_2 & & & \\ x3_1 & x3_2 & x3_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ xn - 1_1 & xn - 1_2 & xn - 1_3 & \ldots & xn - 1_{n-1} \end{array}\right\} \quad (\tau)$$

Cette propriété caractérise les covariants primaires.

Pour le vérifier, nous observerons que toute fonction invariante différente de zéro doit avoir sa source différente de zéro ; en d'autres termes, elle doit contenir le produit

$$x1_1^{m1} \quad x2_2^{m2} \quad \ldots \quad xn - 1_{n-1}^{mn-1},$$

si $m1, m2, \ldots, mn-1$ sont les degrés par rapport aux variables $x1, x2, \ldots, xn-1$. Cette condition n'est pas remplie pour les polaires

$$x1\,\frac{d}{dx2}\,\varphi, \quad x2\,\frac{d}{dx3}\,\varphi, \quad \ldots, \quad xn-2\,\frac{d}{dxn-1}\,\varphi,$$

quand la fonction invariante φ, aux variables $x1, x2, \ldots, xn-1$, ne contient qu'un seul produit

$$x1_1^{m1} x2_2^{m2} \ldots xn-1_{n-1}^{mn-1}$$

formé au moyen des éléments du tableau (τ). On doit donc avoir

$$x1\,\frac{d}{dx2}\,\varphi = 0, \quad x2\,\frac{d}{dx3}\,\varphi = 0, \quad \ldots, \quad xn-2\,\frac{d}{dxn-1}\,\varphi = 0;$$

par suite, φ est un covariant primaire.

Propriétés des coefficients des covariants primaires.

64. Comme nous l'avons vu (§ 44), toute fonction homogène et isobarique des coefficients de formes algébriques est la source p d'une fonction invariante [P], à n séries de variables ; la fonction p est ainsi un coefficient de [P]. D'un autre côté, [P] est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires, relatives aux variables. On déduit de là que *toute fonction homogène et isobarique des coefficients de formes algébriques, est une somme de coefficients de covariants primaires.*

Exemple. — On a

$$a_1 b_3 = \frac{1}{2}(a_1 b_3 + a_3 b_1) + \frac{1}{2}(a_1 b_3 - a_3 b_1);$$

$a_1 b_3 + a_3 b_1$ est le coefficient de $x1_1 x1_3$ dans le covariant primaire $a_{x1} b_{x1}$; $a_1 b_3 - a_3 b_1$ est le coefficient de $x1_1 x2_3$ dans le covariant primaire $(\pm\, a_{x1} b_{x2})$.

65. Tout covariant primaire χ des degrés $m1, m2, \ldots, mn-1$ pour les variables $x1, x2, \ldots, xn-1$ et de poids π, peut s'écrire symboliquement (§ 47) :

$$\chi \equiv \mathrm{O}_c \prod_{i=1}^{n-1} (\pm a1_{x1}\, a2_{x2} \ldots ai_{xi})^{mi-mi+1} (\pm a1_1\, a2_2 \ldots an_n)^{\pi}, \qquad (3)$$

O_c désignant une opération polaire relative aux coefficients (on doit du reste supposer $mn = 0$).

La source de χ est le semi-invariant

$$\psi \equiv \mathrm{O}_c \prod_{i=1}^{n-1} (\pm a1_1\, a2_2 \ldots ai_i)^{mi-mi+1} (\pm a1_1\, a2_2 \ldots an_n)^{\pi}, \qquad (4)$$

qui a les poids

$$\pi_1 = \pi + m1, \quad \pi_2 = \pi + m2, \quad \ldots, \quad \pi_{n-1} = \pi + mn - 1, \quad \pi_n = \pi.$$

La comparaison des expressions symboliques de χ et de ψ permet d'énoncer la propriété suivante : *Si* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *sont les poids de la source* ψ *d'un covariant primaire* χ, *il n'existe aucun autre coefficient de mêmes poids et il n'existe aucun coefficient qui ait, pour les indices* 1, 2, ..., i — 1, i, *les poids*

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_{i-1}, \quad \pi_i + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0).$$

66. D'après la formule (3), toute combinaison linéaire q des coefficients de χ peut s'écrire symboliquement

$$q \equiv \sum \mathrm{O}_c \prod_{i=1}^{n-1} (\pm a1_{k1}\, a2_{k2} \ldots ai_{ki}) \ldots (\pm a1_1\, a2_2 \ldots an_n)^{\pi}, \qquad (5)$$

chacun des produits Π contenant $mi - mi + 1$ déterminants d'ordre i tels que

$$(\pm a1_{k1}\, a2_{k2} \ldots ai_{ki}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

De la même manière, on aura

$$\mathrm{Q} \equiv \sum \mathrm{O}_c \prod_{i=1}^{n-1} (\pm \mathrm{A}1_{k1}\, \mathrm{A}2_{k2} \ldots \mathrm{A}i_{ki}) \ldots (\pm \mathrm{A}1_1\, \mathrm{A}2_2 \ldots \mathrm{A}n_n)^{\pi},$$

pour la transformée de q, par une substitution linéaire des variables.

Les coefficients transformés A_j sont déterminés par l'équation

$$A_j = \alpha_{1j} a_1 + \alpha_{2j} a_2 + \cdots + \alpha_{nj} a_n ;$$

il résulte de là, d'après la formule (4), que la fonction Q contient la source ψ multipliée par

$$\theta = \sum \prod_i^{n-1} (\pm \alpha_{1,k1}\, \alpha_{2,k2} \ldots \alpha_{i,ki}) \ldots (\pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn})^{\pi}.$$

Si la quantité θ est nulle, on obtient, par un changement de notation :

$$\sum \prod_i^{n-1} (\pm a1_{k1}\, a2_{k2} \ldots ai_{ki}) \ldots (\pm a1_1\, a2_2 \ldots an_n) = 0,$$

et d'après la formule (5), la quantité q est nulle quand on la rapporte à un covariant primaire quelconque des degrés $m1$, $m2, \ldots, mn - 1$. En conséquence, *si une fonction linéaire* q *des coefficients d'un covariant primaire* χ *n'est pas nulle identiquement (d'après la définition des covariants primaires), cette fonction linéaire a pour transformée* Q, *une expression qui contient nécessairement la source* ψ.

Au moyen de ce théorème, nous démontrerons la proposition suivante :

Entre les coefficients de covariants primaires linéairement indépendants, il n'existe aucune relation du premier degré qui ne résulte pas de la définition générale des covariants primaires.

Considérons, en effet, des covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots$, linéairement indépendants ; contrairement à l'énoncé, supposons entre les coefficients une relation du premier degré $g = 0$, qui ne résulte pas de la définition générale des covariants primaires. La transformée G sera nécessairement nulle et, d'après ce qui précède, elle doit s'exprimer au moyen des sources $\psi 1, \psi 2, \ldots$, des covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots$ La relation $G = 0$ se partage en relations isobariques $\mathfrak{L} = 0$, entre les coefficients des divers covariants. Soient, en général, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les poids d'un semi-invariant compris dans la suite $\psi 1, \psi 2, \ldots$ Désignons par π_1' le maximum des valeurs de π_1 ; désignons de même par π_2'

la plus grande valeur de π_2 qui se trouve associée à $\pi_1 = \pi'_1$, etc. En considérant, dans l'équation $G = 0$, les termes de poids π'_1, $\pi'_2, \dots \pi'_n$, on obtiendrait une relation linéaire entre les sources ψ de certains covariants de la suite $\chi^1, \chi^2, \dots$ (c'est ce qui résulte de la propriété énoncée au paragraphe 65). Ainsi, les covariants primaires $\chi^1, \chi^2, \dots$ ne seraient pas linéairement indépendants, comme nous l'avons supposé. Par suite, il ne peut exister aucune relation linéaire $g = 0$ entre les coefficients de $\chi^1, \chi^2, \dots$

Propriétés des polaires de covariants primaires.

67. Expressions irréductibles. — Soit $\mathcal{F}$ une fonction isobarique quelconque

$$\mathcal{F} = w_1 p_1 + w_2 p_2 + \cdots + w_r p_r;$$

les lettres w désignent des fonctions des variables; les quantités représentées par $p_1, p_2, \dots, p_r$ dépendent seulement des coefficients de formes algébriques.

Cela posé, nous dirons que $\Sigma_1^r w_i p_i$ est une expression irréductible de $\mathcal{F}$, quand on ne peut pas la remplacer par une somme analogue comprenant moins de r termes. Pour la suite, nous aurons à faire usage des considérations suivantes :

1° *Dans une expression irréductible* $\mathcal{F} = \Sigma \mathrm{wp}$, *les quantités* p *indépendantes des variables s'expriment linéairement au moyen des coefficients de* $\mathcal{F}$.

En effet, tout coefficient $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est une fonction $\mathcal{L}$ du premier degré de $p_1, p_2 \dots, p_r$; d'autre part, les équations $\mathcal{F}' = \mathcal{L}$ sont résolubles par rapport à $p_1, p_2, \dots, p_r$, puisque le nombre des fonctions $\mathcal{L}$ linéairement indépendantes ne peut pas être inférieur à r.

2° *L'expression* $\mathcal{F} = \Sigma \mathrm{wp}$ *est irréductible, s'il n'existe aucune relation du premier degré entre les quantités*

$$w_1, \quad w_2, \quad \dots, \quad w_r; \qquad p_1, \quad p_2, \quad \dots, \quad p_r.$$

Soit

$$w'_1 p'_1 + w'_2 p'_2 + \cdots + w'_\rho p'_\rho$$

une expression de $\mathcal{F}$ comprenant le plus petit nombre possible de termes; on doit établir l'égalité $r = \rho$.

Les coefficients de $\mathcal{F}$ sont des fonctions linéaires $\mathcal{L}$ de p_1, $p_2, \dots p_r$; il en est de même de $p'_1, p'_2, \dots, p'_\rho$, d'après ce qui précède; dès lors, si l'on identifie les multiplicateurs de $p_1, p_2, \dots, p_r$ dans les expressions

$$\sum_1^r w_i p_i \quad \text{et} \quad \sum_1^\rho w'_i p'_i,$$

on obtient $w_1, w_2, \dots, w_r$ comme sommes des quantités $w'_1, w'_2, \dots, w'_\rho$ multipliées par des facteurs numériques. Les fonctions w_1, $w_2, \dots, w_r$ sont, par hypothèse, linéairement indépendantes; on doit donc avoir $r = \rho$: c'est le résultat que nous voulions obtenir.

68. Reprenons encore l'expression symbolique des covariants primaires χ, de poids π et des degrés $m1, m2, \dots, mn - 1$ pour les séries de variables $x1, x2, \dots, xn - 1$. Nous écrirons :

$$\chi \equiv \text{O}_c \chi^0 (\pm a1_1\, a2_2 \dots an_n)^\pi,$$

en prenant

$$\chi^0 = \prod_1^{n-1} (\pm a1_{x1}\, a2_{x2} \dots ai_{xi})^{mi - mi+1}.$$

Soit

$$\chi^0 = w_1 p_1^0 + w_2 p_2^0 + \dots + w_r p_r^0 \tag{6}$$

une expression irréductible de χ^0; nous aurons

$$\chi \equiv w_1 \text{O}_c p_1^0 (\pm a1_1 \dots an_n)^\pi + \dots + w_r \text{O}_c p_r^0 (\pm a1_1\, a2_2 \dots an_n)^\pi,$$

puis

$$\chi = w_1 p_1 + w_2 p_2 + \dots + w_r p_r, \tag{7}$$

$p_1, p_2, \dots, p_r$ étant des quantités indépendantes des variables.

Les quantités $p_1^0, p_2^0, \dots, p_r^0$ sont des fonctions du premier degré des coefficients de χ^0; $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont les fonctions semblables pour le covariant χ. Ces deux séries de fonctions sont en même temps linéairement indépendantes; car toute relation linéaire entre les coefficients d'un covariant primaire χ correspond à la relation analogue pour χ^0 (§ 66).

Puisqu'il n'existe aucune relation du premier degré entre les fonctions $w_1, w_2, \ldots, w_r; p_1, p_2, \ldots, p_r$, la formule (7) fournit une expression irréductible du covariant χ (§ 67). En conséquence, *les expressions irréductibles des covariants primaires de mêmes degrés* m1, m2, ..., mn — 1, *contiennent le même nombre* r *de termes.*

Remarque. — La source ψ du covariant χ jouit de cette propriété qu'aucun autre coefficient ne peut avoir les mêmes poids; par suite, la source est un multiplicateur indépendant des variables dans toute expression irréductible de χ.

Nous désignerons par p_1 ce multiplicateur, dans la formule (7); nous aurons alors

$$w_1 = \prod_1^{n-1} (\pm x1_1\, x2_2 \ldots xi_i)^{mi-mi+1}. \tag{8}$$

69. Nous désignerons par Ω une opération telle que $\Omega\mathcal{F}$ est une somme homogène de covariants identiques, multipliés par des polaires de $\mathcal{F}$ par rapport aux variables. Dans la suite, les caractéristiques Ω affectées d'indices auront des significations analogues. Cela posé, *toute fonction* $\Omega\chi$, *déduite d'un covariant primaire* χ, *contient la source* ψ *de ce covariant.*

La fonction

$$\Omega\chi = \Omega w_1 \,.\, p_1 + \Omega w_2 \,.\, p_2 + \cdots + \Omega w_r \,.\, p_r$$

étant invariante, ne diffère de sa transformée que par une puissance du module; on a donc

$$W'_1 P_1 + W'_2 P_2 + \cdots + W'_r P_r = \delta^{\pi'}(\Omega w_1 p_1 + \Omega w_2 p_2 + \cdots + \Omega w_r p_r),$$

si l'on représente par W′ la transformée de la fonction Ωw. En identifiant les coefficients des divers produits de variables, on obtient des relations

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, \ldots, P_r) = \mathcal{L}_1(p_1, p_2, \ldots, p_r),$$

dans lesquelles $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ désignent des fonctions linéaires différentes de zéro. La quantité $\mathfrak{L}(P_1, P_2, \ldots, P_r)$, qui est la transformée de $\mathfrak{L}(p_1, p_2, \ldots, p_r)$, ne peut pas être indépendante de la source $p_1 = \psi$ (§ 66); par suite, la quantité Ω_χ, supposée différente de zéro, doit contenir la source du covariant primaire χ.

70. Soient $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, des covariants primaires : représentons par χ_k^0 la valeur de la fonction χ^0 [formule (6)], quand le covariant primaire χ, que nous avons supposé quelconque, a la détermination particulière χk. Nous aurons, en expressions irréductibles :

$$\chi^0 k = wk_1 \,.\, p^0 k_1 + wk_2 \,.\, p^0 k_2 + \cdots + wk_{rk} \,.\, p^0 k_{rk}, \tag{6'}$$

$$\chi k = wk_1 \,.\, pk_1 + wk_2 \,.\, pk_2 + \cdots + wk_{rk} \,.\, pk_{rk}. \tag{7'}$$

D'après les propriétés établies ci-dessus (§ 66), *il n'existe aucune relation du premier degré entre les différentes quantités* $p1_j$, $p2_h$, ..., pt_l, *si les covariants primaires* $\chi 1$, $\chi 2$, ..., χt *sont linéairement indépendants.*

Comme conséquence, on peut établir la proposition suivante :

Quand les covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ *sont linéairement indépendants, une fonction*

$$\Omega_1 \chi 1 + \Omega_2 \chi 2 + \cdots + \Omega_t \chi t$$

ne peut pas être nulle, à moins que les quantités

$$\Omega_1 \chi 1, \quad \Omega_2 \chi 2, \quad \ldots, \quad \Omega_t \chi t$$

ne soient nulles séparément.

En effet, l'égalité

$$\sum \Omega_i \chi i = 0$$

fournit des relations du premier degré entre les multiplicateurs $p1_j, p2_h, \ldots, pt_l$; de pareilles relations ne peuvent avoir lieu que si elles sont identiques : on doit donc avoir

$$\Omega_1 \chi 1 = 0, \quad \Omega_2 \chi 2 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_t \chi t = 0.$$

71. On déduit immédiatement de la formule (6′) :

$$\Omega_k\chi^0 k = p^0 k_1 . \Omega_k w k_1 + p^0 k_2 . \Omega_k w k_2 + \cdots + p^0 k_{rk} . \Omega_k w k_{rk}.$$

Remplaçons les différentes variables par des coefficients de formes du premier degré et substituons à $a1, a2, \ldots, an-1$, les variables $x1, x2, \ldots, xn-1$. En employant des parenthèses pour indiquer cette modification, nous écrirons :

$$\{\Omega_k\chi^0_k\} = \{p^0 k_1\} \cdot \{\Omega_k w k_1\} + \cdots + \{p^0 k_{rk}\} \cdot \{\Omega_k w k_{rk}\}. \qquad (9)$$

D'après la valeur de χ^0 [formule (6)], on a, en général :

$$a1 \frac{d}{da2}\chi^0 = 0, \quad \ldots, \quad an-2 \frac{d}{dan-1}\chi^0 = 0,$$

et, par suite :

$$a1 \frac{d}{da2}\Omega\chi^0 = 0, \quad \ldots, \quad an-2 \frac{d}{dan-1}\Omega\chi^0 = 0;$$

en effectuant la modification qui a été indiquée ci-dessus, on voit que $\{\Omega\chi^0\}$ satisfait aux équations

$$x1 \frac{d}{dx2} = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} = 0, \quad \ldots, \quad xn-2 \frac{d}{dxn-1} = 0;$$

du reste, $\{\Omega\chi^0\}$ est une fonction invariante (§ 38, *Rem.* IV); conséquemment $\{\Omega\chi^0_k\}$ est un covariant primaire.

La fonction χ^0 n'est pas modifiée quand on remplace tous les coefficients a par les séries de variables x, et réciproquement; il résulte de là que les covariants primaires $\chi^0 k$ et $\{\Omega\chi^0 k\}$ sont des mêmes degrés par rapport aux variables; leurs expressions irréductibles doivent contenir le même nombre de termes rk (§ 68). Par suite, la formule (9) fournit une expression irréductible de $\{\Omega_k\chi^0 k\}$.

La source de $\{\Omega\chi^0\}$ s'obtient en considérant dans χ^0 le multiplicateur de $a1_1^{m1} a2_2^{m2} \ldots an-1_{n-1}^{mn-1}$ et en remplaçant les variables par des coefficients de formes linéaires; d'après cette remarque, on voit que la source de $\{\Omega\chi^0\}$ est la quantité $\{\Omega w_1\}$.

Quand les sources

$$\{ \Omega_1 w1_1 \}, \quad \{ \Omega_2 w2_1 \}, \quad \ldots, \quad \{ \Omega_t wt_1 \}$$

n'ont entre elles aucune relation du premier degré, les covariants

$$\{ \Omega_1 \chi^0 1 \}, \quad \{ \Omega_2 \chi^0 2 \}, \quad \ldots, \quad \{ \Omega_t \chi^0 t \}$$

sont linéairement indépendants et il en est de même des différentes fonctions $\{\Omega_k wk_j\}$ (voir § 66). Conséquemment, *si les quantités* $\Omega_k wk_1$ *n'ont entre elles aucune relation linéaire, il en est de même des fontions* $\Omega_k wk_j$, *où l'on a*

$$k = 1, 2, \ldots, t; \quad j = 1, 2, \ldots, rk.$$

72. Soient

$$m1_k, \quad m2_k, \quad \ldots, \quad mn - 1_k$$

les degrés du covariant χk pour les variables $x1, x2, \ldots, xn - 1$; d'après la formule (8), on a

$$wk_1 = \prod_1^{n-1} (\pm x1_1 x2_2 \ldots xi_i)^{mi_k - mi + 1_k}. \tag{8'}$$

On a, du reste :

$$mi_k = \eta k_n - \eta k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1), \tag{10}$$

si l'on représente par $\eta k_1, \eta k_2, \ldots, \eta k_n$ les poids de la fonction $\Omega_k wk_1$ pour les indices $1, 2, \ldots, n$; en effet, la quantité wk_1 et ses polaires ont les mêmes poids $-m1_k, -m2_k, \ldots, -mn-1_k$, pour les indices $1, 2, \ldots, n-1$; pour obtenir la formule (10), il suffit d'observer que le poids varie de la même manière pour tous les indices quand on multiplie une polaire de wk_1 par un covariant identique.

Cela posé, admettons qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions $\Omega_k wk_1$; on aura, par exemple :

$$\varepsilon_1 \Omega_1 w1_1 + \varepsilon_2 \Omega_2 w2_1 + \cdots + \varepsilon_h \Omega_h wh_1 = 0, \tag{11}$$

les lettres ε désignant des facteurs numériques différents de zéro.

Cette relation peut être supposée isobarique; on a alors :

$$\eta 1_i = \eta 2_i = \cdots = \eta h_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

puis

$$w1_1 = w2_1 = \cdots = wh_1,$$

à cause des formules (8′) et (10). Dans ces conditions, on obtient

$$\begin{array}{l}
\Omega_1 \chi 1 = \Omega_1 w1_1 \,.\, p1_1 + \Omega_1 w1_2 \,.\, p1_2 + \cdots + \Omega_1 w1_{r1} \,.\, p1_{r1}, \\
\Omega_2 \chi 1 = \Omega_2 w2_1 \,.\, p1_1 + \Omega_2 w1_2 \,.\, p1_2 + \cdots + \Omega_2 w1_{r1} \,.\, p1_{r1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Omega_h \chi 1 = \Omega_h wh_1 \; p1_1 + \Omega_h w1_2 \,.\, p1_2 + \cdots + \Omega_h w1_{r1} \,.\, p1_{r1}.
\end{array}$$

D'après ces relations et d'après la formule (11), la fonction

$$\varepsilon_1 \Omega_1 \chi 1 + \varepsilon_2 \Omega_2 \chi 1 + \cdots + \varepsilon_h \Omega_t \chi 1$$

est indépendante de la source $p1_1$ du covariant χ_1 ; par suite, elle doit être nulle (§ 69).

Nous dirons que les opérations $\Omega_1\ \Omega_2 \ldots \Omega_t$ sont *linéairement indépendantes* pour $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, quand aucune des fonctions $\Omega_k \chi k$ ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire de

$$\Omega_1 \chi k, \quad \Omega_2 \chi k, \quad \ldots, \quad \Omega_{k-1} \chi k, \quad \Omega_{k+1} \chi k, \quad \ldots, \quad \Omega_t \chi k;$$

les quantités

$$\Omega_1 w1_1, \quad \Omega_2 w2_1, \quad \ldots, \quad \Omega_t wt_1$$

ne peuvent alors satisfaire ni à la formule (11), ni à toute autre formule analogue.

En tenant compte de la propriété établie au paragraphe précédent, on obtient ce résultat : *Il n'existe aucune relation du premier degré entre les fonctions* $\Omega_k wk_j$, *si les opérations* $\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_t$ *sont linéairement indépendantes pour* $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$.

73. *Si les covariants primaires* $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ *n'ont entre eux aucune relation du premier degré et si les opérations* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_t$ *sont linéairement indépendantes pour* $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, *la fonction*

$$\Omega_1 \chi 1 + \Omega_2 \chi 2 + \cdots + \Omega_t \chi t$$

a pour expression irréductible une somme de r1 + r2 + ⋯ + rt *termes* (rk étant le nombre de termes d'une expression irréductible de χk).

En effet, on a, par la formule (7′) :

$$\sum_{1}^{t} \Omega_k \chi k = \sum_{k=1,\,j=1}^{k=t,\,j=rk} \Omega_k w k_j \,.\, \chi k_j \,.$$

L'expression contenue dans le second membre de cette équation est irréductible, parce que les fonctions $\Omega_k w k_j$ et χk_j sont linéairement indépendantes (§§ 67, 70, 72).

74. Soient $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ des covariants primaires qui n'ont entre eux aucune relation du premier degré; si les opérations $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_t$ ne sont pas linéairement indépendantes pour $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, *on peut toujours donner à la somme*

$$\Omega_1 \chi 1 + \Omega_2 \chi 2 + \cdots + \Omega_t \chi t$$

une expression

$$\Omega'_1 \chi' 1 + \Omega'_2 \chi' 2 + \cdots + \Omega'_{t_1} \chi' t_1, \quad (t_1 < t),$$

telle que $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_{t_1}$ *soient des fonctions linéaires de* $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, *et que les opérations* $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{t_1}$ *soient linéairement indépendantes pour* $\chi'_1, \chi'_2, \ldots$

En effet, si l'on a par exemple

$$\Omega_1 \chi 1 = \varepsilon_2 \Omega_2 \chi 1 + \varepsilon_3 \Omega_3 \chi 1 + \cdots + \varepsilon_t \Omega_t \chi 1,$$

on peut écrire

$$\sum_{1}^{t} \Omega_i \chi i = \Omega_2(\chi 2 + \varepsilon_2 \chi 1) + \Omega_3(\chi 3 + \varepsilon_3 \chi 1) + \cdots + \Omega_t(\chi t + \varepsilon_t \chi 1).$$

D'après cette formule, $\Omega_2 \chi 2$ et $\Omega_2 \chi 1$ sont des fonctions des mêmes degrés : en supputant les altérations de degrés que l'opération Ω_2 produit par rapport aux variables, on trouve que $\chi 2 + \varepsilon_2 \chi 1$ est une fonction homogène et, par suite, un covariant primaire, $\chi' 1$; il en est de même de

$$\chi' 2 = \chi 3 + \varepsilon_3 \chi 1, \quad \ldots, \quad \chi' \overline{t-1} = \chi t + \varepsilon_t \chi 1.$$

On peut donc remplacer la somme

$$\Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t$$

par

$$\Omega'_1\chi' 1 + \Omega'_2\chi' 2 + \cdots + \Omega'_{t-1}\chi'\overline{t-1}.$$

Les covariants primaires $\chi' 1$, $\chi' 2$, ... n'ont entre eux aucune relation du premier degré; si les opérations $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{t-1}$ ne sont pas linéairement indépendantes pour $\chi'_1, \ldots, \chi'\overline{t-1}$, on peut appliquer à $\Sigma\Omega'\chi'$ la réduction indiquée pour $\Sigma\Omega\chi$. En continuant ainsi de suite, on obtiendra le résultat annoncé.

Application au développement des fonctions invariantes suivant les polaires de covariants primaires.

75. D'après la réduction des fonctions invariantes aux covariants primaires, toute fonction invariante φ est exprimable sous la forme

$$\varphi = \Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t;$$

nous pourrons toujours supposer qu'il n'existe aucune relation du premier degré entre les covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ et que, d'autre part, les opérations $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_t$ sont linéairement indépendantes pour $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$. Dans ces conditions, la fonction φ a pour expression irréductible :

$$\varphi = \Omega_1 w1_1 \,.\, p1_1 + \Omega_1 w1_2 \,.\, p1_2 + \cdots + \Omega_1 w1_{r1} \,.\, p1_{r1} + \cdots$$
$$+ \Omega_t wt_1 \,.\, pt_1 + \cdots + \Omega_t wt_{rt} \,.\, pt_{rt}$$

(voir § 73). La quantité $p1_1$, qui est la source de $\chi 1$, est une combinaison linéaire des coefficients de φ; par suite, $p1_1$ est la source d'une fonction invariante $\varphi 1$, aux variables $x1, x2, \ldots, xn$, que l'on déduit de φ au moyen d'une opération polaire relative aux variables (§ 45). La fonction invariante $\varphi 1$, ayant même source que $\chi 1$, ne peut différer de $\chi 1$ que par une puissance de $(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)$. Conséquemment, *les covariants primaires* $\chi 1$,

$\chi 2, \ldots, \chi t$, *auxquels une fonction invariante* φ *est réductible, sont des quotients de polaires de* φ, *par des puissances du déterminant* $(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)$ (*).

Applications. — I. Quand une fonction invariante φ est de la forme $\Omega\chi 1$, les expressions irréductibles de φ et de ses polaires différentes de zéro contiennent le même nombre de termes : c'est ce qui résulte du théorème énoncé au paragraphe 73. Réciproquement, on peut énoncer la propriété suivante : *Si les expressions irréductibles de* φ *et de ses polaires comprennent le même nombre de termes,* φ *est de la forme* $\Omega_1\chi 1$.

En effet, si l'on a comme ci-dessus

$$\varphi = \Omega_1\chi 1 + \cdots + \Omega_t \chi t,$$

l'expression irréductible de φ contient $r1 + r2 + \cdots + rt$ termes. D'un autre côté, la polaire de φ, qui est le produit de $\chi 1$ par un covariant identique, a pour expression irréductible une somme de $r1$ termes. D'après les conditions de l'énoncé, on doit donc avoir

$$r2 = 0, \quad r3 = 0, \quad \ldots, \quad rt = 0,$$

(*) *Exemple.* — La fonction invariante

$$\varphi \equiv (\pm a_{x1} b_{x2})\, a_{x1}^2 b_{x2}^2$$

peut s'écrire

$$\varphi = \frac{1}{12}\left(x2\frac{d}{dx1}\right)^2 \chi 1 + \frac{1}{2}\, x2 \frac{d}{dx1}\, \chi 2 + \frac{1}{3}\chi 3,$$

si l'on prend

$$\chi 1 \equiv a_{x1}^2 b_{x1}^2 \, (\pm a_{x1} b_{x2}),$$

$$\chi 2 \equiv a_{x1} b_{x1} \, (\pm a_{x1} b_{x2})^2,$$

$$\chi 3 \equiv (\pm a_{x1} b_{x2})^3.$$

On a, d'autre part :

$$\chi 1 = \frac{1}{2}\left(x1 \frac{d}{dx2}\right)^2 \varphi,$$

$$\chi 2 = x1 \frac{d}{dx2}\varphi - \frac{1}{4}\, x2 \frac{d}{dx1}\left(x1 \frac{d}{dx2}\right)^2 \varphi,$$

$$\chi 3 = 3\varphi - \frac{1}{4}\left(x2\frac{d}{dx1}\right)^2 \chi 1 - \frac{3}{2}\, x2 \frac{d}{dx1}\chi 2.$$

c'est-à-dire :

$$\chi^2 = 0, \quad \chi^3 = 0, \quad \ldots, \quad \chi^t = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi = \Omega_1 \chi^1.$$

II. *Si une fonction invariante* φ' *est réductible aux covariants primaires*

$$\chi^1, \quad \chi^2, \quad \ldots, \quad \chi^{t_1}, \quad (t_1 \overline{\overline{<}} t),$$

la fonction φ' *multipliée par un covariant identique, est une somme de produits de polaires de* φ *par des covariants identiques.*

Pour l'établir, il suffit d'exprimer, dans le développement de φ', les covariants $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^{t_1}$ au moyen des polaires de φ.

76. *Les covariants primaires que l'on peut déduire de* φ, *au moyen d'opérations polaires, sont des combinaisons linéaires de* $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t$.

Soit, en effet, χ un covariant primaire, dont le produit par un covariant identique est une polaire de φ, relative aux variables; d'après la formule

$$\varphi = \Omega_1 \chi^1 + \Omega_2 \chi^2 + \cdots + \Omega_t \chi^t, \tag{12}$$

nous aurons une relation de la forme

$$\Omega \chi = \Omega'_1 \chi^1 + \Omega'_2 \chi^2 + \cdots + \Omega'_t \chi^t,$$

dans laquelle $\Omega\chi$ représente le produit de χ par un covariant identique. Il résulte de là que les fonctions $\chi, \chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t$ ont entre elles une relation du premier degré (§ 70); par hypothèse, les covariants $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t$ sont linéairement indépendants : en conséquence, χ est une combinaison linéaire de $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t$.

Si l'on suppose $\varphi = \chi^1$, on obtient cette propriété : *Au moyen d'une opération polaire relative aux variables, on ne peut pas déduire d'un covariant primaire un autre covariant primaire.*

Application. — Soient

$$\chi'^1, \quad \chi'^2, \quad \ldots, \quad \chi'^t$$

des covariants primaires

$$\chi'^i = \varepsilon_{i1} \chi^1 + \varepsilon_{i2} \chi^2 + \cdots + \varepsilon_{it} \chi^t, \quad (i = 1, 2, \ldots, t) \tag{13}$$

obtenus comme combinaisons linéaires de $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ et de telle manière que le déterminant

$$\varepsilon = (\pm\, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \ldots \varepsilon_{tt})$$

soit différent de zéro.

Représentons par $\varepsilon . \varepsilon'_{ij}$ le *mineur* de ε_{ij} dans le déterminant ε; si les opérations $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \ldots, \Omega_{1t}$ sont définies par les formules schématiques

$$\Omega_{1i} = \varepsilon'_{i1}\Omega_1 + \varepsilon'_{i2}\Omega_2 + \cdots + \varepsilon'_{it}\Omega_t,$$

on a identiquement :

$$\Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t = \Omega_{11}\chi' 1 + \Omega_{12}\chi' 2 + \cdots + \Omega_{1t}\chi' t. \quad (14)$$

Nous dirons que les développements

$$\varphi = \sum \Omega_i \chi i \qquad \text{et} \qquad \varphi = \sum \Omega_{1i}\chi' i$$

sont *équivalents par transformation linéaire.* Cela posé, nous établirons le théorème suivant :

Tous les développements d'une fonction invariante φ, au moyen de covariants primaires, sont équivalents entre eux par transformation linéaire (*).

Considérons la fonction invariante φ, développée suivant la formule (12) et suivant une formule analogue :

$$\varphi = \Omega_{21}\chi'' 1 + \Omega_{22}\chi'' 2 + \cdots + \Omega_{2t_1}\chi'' t_1. \quad (15)$$

D'après les résultats indiqués aux paragraphes 75 et 76, $\chi'' 1, \chi'' 2, \ldots$ sont des combinaisons linéaires de $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ et réciproquement; du reste, il n'existe aucune relation du premier degré entre les fonctions χ'' ou χ. On a donc $t_1 = t$ et on peut écrire $\chi'' i = \chi i$, d'après la formule (13).

(*) Dans le cas de formes binaires, on retrouve un résultat connu. Voir Clebsch, *Theorie der binären Formen*, p. 19; Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, t. II, p. 82.

En faisant usage des équations (12), (14) et (15), on obtient :

$$(\Omega_{11}\chi'1 - \Omega_{21}\chi'1) + (\Omega_{12}\chi'2 - \Omega_{22}\chi'2) + \cdots + (\Omega_{1t}\chi't - \Omega_{2t}\chi't) = 0.$$

A cause de l'indépendance des covariants primaires χ', la dernière égalité peut être remplacée par

$$\Omega_{21}\chi'1 = \Omega_{11}\chi'1, \quad \Omega_{22}\chi'2 - \Omega_{12}\chi'2, \quad .., \quad \Omega_{2t}\chi't = \Omega_{1t}\chi't,$$

(voir § 70). Il résulte de là, d'après les équations $\chi''i = \chi'i$, que les formules

$$\varphi = \sum \Omega_{2i}\chi''i \qquad \text{et} \qquad \varphi = \sum \Omega_{1i}\chi'i$$

sont identiques; en d'autres termes, les développements (12) et (15) sont équivalents par transformation linéaire : c'est le résultat que nous voulions obtenir.

Transmutation des fonctions semi-invariantes.

77. Comme nous l'avons vu (§ 34), les fonctions semi-invariantes quelconques permettent de déterminer des semi-invariants; par suite, elles se rattachent directement à l'étude des covariants primaires. Nous indiquerons d'une manière succincte des modes de formation analogues à ceux que nous avons établis pour les fonctions invariantes (§§ 12 à 19).

Désignons, comme précédemment, par $S_{\frac{1}{2}}$ la substitution linéaire des variables définie par les équations

$$x_i = \alpha_{ii}X_i + \alpha_{i,\,i+1}X_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}X_n,$$

$i = 1, 2, \ldots n$; nous représenterons encore par les lettres θ des fonctions des paramètres de la substitution.

Soient

$$(p_1, p_2, \ldots, p_r), \quad (p'_1, p'_2, \ldots, p'_r), \quad (q'_1, q'_2, \ldots, q'_r)$$

des groupes de fonctions des éléments (variables et coefficients);

nous dirons que les systèmes $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_r)$, sont *cogrédients pour la substitution* $S_{\frac{1}{2}}$, si l'on a, pour la substitution $S_{\frac{1}{2}}$, les relations

$$p_j = \theta_{j1} P_1 + \theta_{j2} P_2 + \cdots + \theta_{jr} P_r,$$

$$\alpha_{11}^{\varepsilon_1} \alpha_{22}^{\varepsilon_2} \ldots \alpha_{nn}^{\varepsilon_n} p'_j = \theta_{j1} P'_1 + \theta_{j2} P'_2 + \cdots + \theta_{jr} P'_r, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ étant des constantes.

Nous dirons que les systèmes $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ sont *contragrédients pour la substitution* $S_{\frac{1}{2}}$, si l'on a, dans les mêmes conditions :

$$\alpha_{11}^{\varepsilon_1} \alpha_{22}^{\varepsilon_2} \ldots \alpha_{nn}^{\varepsilon_n} Q_j = \theta_{1j} q_1 + \theta_{2j} q_2 + \cdots + \theta_{rj} q_r.$$

Par des considérations analogues à celles que nous avons développées aux paragraphes 10 et 11, on obtient les résultats suivants :

1° Pour la substitution $S_{\frac{1}{2}}$, les coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}$ et les produits $x1_1^{\alpha 1_1} \ldots x\mu_n^{\alpha\mu_n}$ sont respectivement cogrédients des dérivées

$$\frac{d^{\alpha 1 + \cdots + \alpha\mu} \psi}{dx_1^{\alpha 1_1} \ldots dx\mu_n^{\alpha\mu_n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}} \frac{d\psi}{da_{\alpha 1_1 \ldots \alpha\mu_n}}$$

d'une fonction semi-invariante ψ.

2° Les produits de dérivées premières d'une ou plusieurs fonctions semi-invariantes quelconques ψ, ψ_1, ... et les dérivées multiples correspondantes de ψ constituent des systèmes cogrédients pour la substitution $S_{\frac{1}{2}}$.

3° Pour la substitution $S_{\frac{1}{2}}$, les variables x et les coefficients $a_{\alpha 1_1 \ldots}$ sont des quantités respectivement contragrédientes aux dérivées

$$\frac{d\psi}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{da_{\alpha 1_1 \ldots}}.$$

78. On peut de même énoncer les théorèmes suivants :

1° *Toute fonction semi-invariante est la somme des produits* *des termes correspondants de deux systèmes contragrédients pour la substitution* $S_{\frac{1}{2}}$.

2° *Si une fonction semi-invariante* ψ *est exprimable d'une seule manière comme fonction entière des séries de quantités* (p1), (p2), ..., *on n'altère pas la propriété de semi-invariance en remplaçant dans* ψ *les quantités* (p1), (p2), ..., *par des quantités* (p'1), (p'2), ..., *cogrédientes pour la substitution* $S_{\frac{1}{2}}$.

On déduit de là des conséquences tout à fait semblables à celles qui ont été indiquées aux paragraphes 14 à 19 : il suffit de remplacer dans les énoncés, la dénomination de fonction invariante par la dénomination de fonction semi-invariante.

CHAPITRE VI.

LOI DE FORMATION DES FONCTIONS INVARIANTES (*).

Covariants dérivés.

79. Soit φ une fonction invariante aux $n - 1$ séries de n variables

$$x1, \quad x2, \quad .., \quad xn - 1 ;$$

soit f une forme quelconque aux μ séries de variables

$$x1, \quad x2, \quad ..., \quad x\mu, \quad \left(\mu \gtreqless n - 1\right).$$

Nous désignerons par $\mathrm{R}(f, \varphi)$ le produit

$$\Pi_{ij} \begin{vmatrix} x1\dfrac{df}{dy1} & x2\dfrac{df}{dy1} & \dots & xi\dfrac{df}{dy1} \\ x1\dfrac{df}{dy2} & x2\dfrac{df}{dy2} & \dots & xi\dfrac{df}{dy2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x1\dfrac{df}{dyj} & x2\dfrac{df}{dyj} & \dots & xi\dfrac{df}{dyj} \\ x1\dfrac{d\varphi}{dx1} & x2\dfrac{d\varphi}{dx1} & \dots & xi\dfrac{d\varphi}{dx1} \\ x1\dfrac{d\varphi}{dx2} & x2\dfrac{d\varphi}{dx2} & \dots & xi\dfrac{d\varphi}{dx2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x1\dfrac{d\varphi}{dxi'} & x2\dfrac{d\varphi}{dxi'} & \dots & xi\dfrac{d\varphi}{dxi'} \end{vmatrix}_{(r_{ij})} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{df}{dy1_1} & \dfrac{df}{dy1_2} & \dots & \dfrac{df}{dy1_n} \\ \dfrac{df}{dy2_1} & \dfrac{df}{dy2_2} & \dots & \dfrac{df}{dy2_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{df}{dyj_1} & \dfrac{df}{dyj_2} & \dots & \dfrac{df}{dyj_n} \\ \dfrac{d\varphi}{dx1_1} & \dfrac{d\varphi}{dx1_2} & \dots & \dfrac{d\varphi}{dx1_n} \\ \dfrac{d\varphi}{dx2_1} & \dfrac{d\varphi}{dx2_2} & \dots & \dfrac{d\varphi}{dx2_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d\varphi}{dxi'_1} & \dfrac{d\varphi}{dxi'_2} & \dots & \dfrac{d\varphi}{dxi'_n} \end{vmatrix}_{(r_{nj})},$$

(*) J. Deruyts, *Détermination des fonctions invariantes de formes à plusieurs séries de variables.*

en introduisant les conventions suivantes :

1° Dans les déterminants d'ordre k, on a $i' = k - j$;

2° $y1, y2, \ldots, yj$ représentent des séries de variables comprises dans le système $x1, x2, \ldots, x\mu$;

3° Le produit Π_{ij} se rapporte à toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ et aux valeurs $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ que l'on peut donner à j dans les déterminants d'ordre k;

4° Le produit $R(f, \varphi)$ contient r_{ij} et r_{nj} déterminants d'ordres i, n, analogues à ceux qui sont indiqués explicitement; du reste, les séries de variables y peuvent avoir des déterminations distinctes ou non, dans les différents facteurs du produit Π_{ij}.

Cela posé, la fonction $R(f, \varphi)$ est invariante, car elle est une somme de produits homogènes de polaires et de déterminants des dérivées premières relatives aux variables. Remplaçons les produits de dérivées premières de f et de φ par les dérivées multiples correspondantes de f et de φ; nous déduirons ainsi de $R(f, \varphi)$ une fonction invariante (§ 17). Nous représenterons par $[R(f, \varphi)]$ cette nouvelle fonction invariante, en supposant que les dérivées multiples de f et de φ sont indépendantes des variables.

Nous dirons que $[R(f, \varphi)]$ est un *covariant dérivé* de f et de φ.

La fonction $R(f, \varphi)$ satisferait aux équations

$$x1 \frac{d}{dx2} = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} = 0, \quad \ldots, \quad xn - 2 \frac{d}{dxn - 1} = 0,$$

si les produits de dérivées du premier ordre de f et de φ étaient indépendants des variables. On obtient précisément $[R(f, \varphi)]$ en remplaçant dans $R(f, \varphi)$ les produits de dérivées premières de f et de φ par des dérivées multiples indépendantes des variables; la fonction invariante $[R(f, \varphi)]$ satisfait donc aux équations

$$xi \frac{d}{dxi + 1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 2;$$

elle contient, d'autre part, les seules variables $x1, x2, \ldots, xn-1$: par conséquent, *tout covariant dérivé est un covariant primaire.*

80. Écrivons symboliquement :

$$\varphi \equiv \varphi_s, \quad f \equiv (a1_{x1})^{\alpha 1} (a2_{x2})^{\alpha 2} \ldots (a\mu_{x\mu})^{\alpha\mu};$$

le semi-invariant, qui est la source de $[R(f, \varphi)]$, est représenté en expression symbolique par

$$\alpha 1!\, \alpha 2! \ldots \alpha\mu! \prod_{i=1,\, j=0}^{i=n,\, j=i} \begin{vmatrix} b1_1 & b1_2 & \ldots & b1_i \\ b2_1 & b2_2 & \ldots & b2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ bj_1 & bj_2 & \ldots & bj_i \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx1_i} \\ \dfrac{d}{dx2_1} & \dfrac{d}{dx2_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{dxi'_1} & \dfrac{d}{dxi'_2} & \ldots & \dfrac{d}{dxi'_i} \end{vmatrix}^{(r_{ij})} \varphi_s; \qquad (1)$$

si l'on désigne par $b1, b2, \ldots, bj$ des symboles compris dans la suite $a1, a2, \ldots, a\mu$.

Réduction des covariants primaires aux covariants dérivés.

81. Nous nous proposons d'établir que tout covariant primaire d'une forme quelconque f est une somme de covariants dérivés de f. A cet effet, nous démontrerons le théorème suivant :

Tout semi-invariant symbolique ψ_s contenant les μ symboles a1, a2, ..., aμ *peut être obtenu au moyen de covariants primaires symboliques χ'_s, exprimables seulement au moyen des symboles* *différents de* a1, a2, ..., aμ; *le semi-invariant* ψ_s *est réductible à une somme de termes tels que*

$$\frac{d\chi'_s}{d\omega_\mu} = \prod_{i=1,j=0}^{i=n,j=i} \begin{vmatrix} b1_1 & b1_2 & \dots & b1_i \\ b2_1 & b2_2 & \dots & b2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ bj_1 & bj_2 & \dots & bj_i \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \dots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \dots & \frac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dxi'_1} & \frac{d}{dxi'} & \dots & \frac{d}{dxi'_i} \end{vmatrix}^{(r_{ij})} \chi'_s. \tag{2}$$

(Les lettres b représentent, comme ci-dessus, des symboles compris dans la suite $a1$, $a2$, ..., $a\mu$).

La réduction que nous voulons établir se vérifie immédiatement dans le cas de $\mu = 0$; en effet, tout semi-invariant symbolique ψ_s s'écrit, à part un facteur numérique,

$$\prod_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \dots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \dots & \frac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dxi_1} & \frac{d}{dxi_2} & \dots & \frac{d}{dxi_i} \end{vmatrix}^{\pi_i - \pi_{i+1}} \chi_s;$$

χ_s est le covariant primaire qui a pour source ψ_s; $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sont les poids de ψ_s (§ 47, *Applic.*).

D'après cette remarque, nous établirons le théorème énoncé, en le considérant comme exact pour $\mu = k$ et en le vérifiant pour $\mu = k + 1$. Nous admettrons donc que tout semi-invariant symbolique ψ'_s, contenant les symboles $a1, a2, \ldots, ak$, est une somme d'expressions analogues à

$$\frac{d\chi'_s}{d\omega_k} = \prod_{i=1,\, j=1}^{i=n,\, j=i} \begin{vmatrix} b'1_1 & b'1_2 & \ldots & b'1_i \\ b'2_1 & b'2_2 & \ldots & b'2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'j_1 & b'j_2 & \ldots & b'j_i \\ \frac{d}{dx1_1} & \frac{d}{dx1_2} & \ldots & \frac{d}{dx1_i} \\ \frac{d}{dx2_1} & \frac{d}{dx2_2} & \ldots & \frac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dxi'_1} & \frac{d}{dxi'_2} & \ldots & \frac{d}{dxi'_i} \end{vmatrix}^{(r'_{ij})} \chi'_s. \tag{2'}$$

Dans cette formule, la notation (r'_{ij}) doit être interprétée de la même manière que la notation (r_{ij}) employée ci-dessus pour $i = 1, 2, \ldots, n$; les lettres b' représentent des symboles quelconques compris dans le groupe $a1, a2, \ldots, ak$; le covariant primaire χ'_s se rapporte aux symboles différents de $a1, a2, \ldots, ak$: du reste, ψ'_s et χ'_s doivent être supposés indépendants de $\overline{ak+1}$, $\overline{ak+2}$, ...

Remarque. — Soient π' le poids du covariant χ'_s; $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ les poids du semi-invariant ψ'_s pour les indices $1, 2, \ldots, n$.

Si l'on effectue la substitution linéaire

$$x_i = \varepsilon X_i, \quad x_h = X_h \quad (h \gtrless i),$$

les quantités b'_i, b'_h, χ'_s ont pour transformées $\varepsilon b'_i$, b_h, $\varepsilon^{\pi'}\chi'_s$; en même temps, on a

$$\frac{d}{dX_i} = \varepsilon \frac{d}{dx_i}, \quad \frac{d}{dX_h} = \frac{d}{dx_h}.$$

La transformée de $\frac{d\chi'_s}{d\omega_k}$ doit être égale à $\varepsilon^{\pi'_i} \frac{d\chi'_s}{d\omega_k}$; on a donc

$$\pi'_i = \pi' + \sum_{j=0}^{i} r'_{ij} + \sum_{j=0}^{i+1} r'_{i+1,j} + \cdots + \sum_{j=0}^{n} r'_{nj},$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. On déduit de là :

$$\pi'_i - \pi'_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} r'_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

82. Désignons par ψ_s un semi-invariant symbolique qui contient, outre les symboles $a1$, $a2$, ..., ak, le nouveau symbole $\overline{ak+1}$; afin de simplifier l'écriture, nous remplacerons la notation $\overline{ak+1}$ par a.

La quantité ψ_s est développable comme somme de produits $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, multipliés par des fonctions $\mathfrak{M}$ indépendantes du symbole a. Soit r_n la valeur maxima de α_n; désignons par r_{n-1} la valeur maxima de α_{n-1} qui se trouve associée à $\alpha_n = r_n$; en général, nous supposerons que r_i est la valeur maxima de α_i qui se trouve associée à

$$\alpha_n = r_n, \quad \alpha_{n-1} = r_{n-1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i+1} = r_{i+1}.$$

Le produit $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$ est le terme principal de ψ_s par rapport aux coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$; si nous écrivons

$$\psi_s = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} \mathfrak{M}_0 + \sum a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} \mathfrak{M},$$

la fonction $\mathfrak{M}_0$ est un semi-invariant indépendant du symbole a (§ 34); nous représenterons $\mathfrak{M}_0$ par la notation ψ'_s que nous avons employée ci-dessus pour désigner un semi-invariant relatif aux symboles $a1$, $a2$, ..., ak.

Soient

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_n \qquad \text{et} \qquad \pi'_1, \quad \pi'_2, \quad \ldots, \quad \pi'_n$$

les poids de ψ_s et de ψ'_s pour les indices $1, 2, \ldots, n$; nous aurons $\pi'_i = \pi_i - r_i$. Suivant notre supposition (§ 81), on peut écrire

$$\psi'_s = \sum \frac{d\chi'_s}{d\omega_k},$$

et on a, comme nous l'avons vu :

$$\sum_{j=0}^{i} r'_{ij} = \pi'_i - \pi'_{i+1} \quad (i < n). \tag{3}$$

83. Soit

$$\psi_s = \mathcal{M}_0 a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_{i-1}^{r_{i-1}} a_{i+2}^{r_{i+2}} \ldots a_n^{r_n} + \sum \mathcal{M} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{i-1}^{\alpha_{i-1}} a_{i+2}^{\alpha_{i+2}} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

le développement de ψ_s suivant les puissances de

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{i-1}, \quad a_{i+2}, \quad \ldots, \quad a_n.$$

La fonction $\mathcal{M}_0$ est nécessairement du degré total $r_i + r_{i+1}$ par rapport à a_i, a_{i+1}; d'un autre côté, r_{i+1} est, par supposition, l'exposant de la plus haute puissance de a_{i+1} qui multiplie $a_n^{r_n} a_{n-1}^{r_{n-1}} \ldots a_{i+2}^{r_{i+2}}$; en conséquence, la fonction $\mathcal{M}_0$ est divisible par $a_i^{r_i}$ et nous pourrons écrire :

$$\psi_s = \mathcal{M}'_0 a_1^{r_1} \ldots a_i^{r_i} a_{i+2}^{r_{i+2}} \ldots a_n^{r_n} + \sum \mathcal{M} \,.\, a_1^{\alpha_1} \ldots a_{i-1}^{\alpha_{i-1}} a_{i+2}^{\alpha_{i+2}} \ldots a_n^{\alpha_n}. \quad (4)$$

Pour la valeur *numérique* i, on a $(i+1, i)\psi_s = 0$, c'est-à-dire

$$(i+1, i)\,\mathcal{M}'_0 \times a_1^{r_1} \ldots a_i^{r_i} a_{i+2}^{r_{i+2}} \ldots a_n^{r_n}$$

$$+ \sum (i+1, i)\,\mathcal{M} \times a_1^{\alpha_1} \ldots a_{i-1}^{\alpha_{i-1}} a_{i+2}^{\alpha_{i+2}} \ldots a_n^{\alpha_n} = 0;$$

on obtient, par suite :

$$(i+1, i)\,\mathcal{M}'_0 = 0; \quad (5)$$

(il faut toutefois observer que cette équation a lieu pour la valeur numérique i, et non pas pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$).

D'après l'équation (4), $\mathcal{M}'_0$ a, pour les indices i et $i+1$, les poids $\pi_i - r_i$ et π_{i+1} : il résulte de la formule (5) que la différence des poids de $\mathcal{M}'_0$ pour les indices i, $i+1$ ne peut pas être négative; on a ainsi

$$\pi_i - r_i - \pi_{i+1} \geqq 0,$$

ou encore

$$\pi'_i - \pi'_{i+1} - r_{i+1} \geqq 0, \quad (6)$$

d'après les relations

$$\pi'_i = \pi_i - r_i, \quad \pi'_{i+1} = \pi_{i+1} - r_{i+1}.$$

84. Les formules (3) et (6) fournissent les relations

$$\sum_{j=0}^{i} r'_{ij} \geqq r_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Par suite, il existe au moins un système de nombres ρ_{ij} positifs ou nuls, non supérieurs aux nombres r'_{ij} et pour lesquels on a

$$\sum_{j=0}^{i} \rho_{ij} = r_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

D'après ces considérations et d'après l'expression de $\dfrac{d\chi'_s}{d\omega_k}$ (§ 81), nous pourrons former la fonction

$$a_1^{r_1}\,\Pi \left|\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{i+1} \\ b'1_1 & b'1_2 & \ldots & b'1_{i+1} \\ b'2_1 & b'2_2 & \ldots & b'2_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'j_1 & b'j_2 & \ldots & b'j_{i+1} \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx1_{i+1}} \\ \dfrac{d}{dx2_1} & \dfrac{d}{dx2_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx2_{i+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{dxi'_1} & \dfrac{d}{dxi'_2} & \ldots & \dfrac{d}{dxi'_{i+1}} \end{array}\right|^{(\rho_{ij})} \cdot \left|\begin{array}{cccc} b'1_1 & b'1_2 & \ldots & b'1_i \\ b'2_1 & b'2_2 & \ldots & b'2_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'j_1 & b'j_2 & \ldots & b'j_i \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx1_i} \\ \dfrac{d}{dx2_1} & \dfrac{d}{dx2_2} & \ldots & \dfrac{d}{dx2_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d}{dxi'_1} & \dfrac{d}{dxi'_2} & \ldots & \dfrac{d}{dxi'_i} \end{array}\right|^{(r'_{ij}-\rho_{ij})} \chi'_s,$$

que nous désignerons par V^0 (*). Cette fonction peut évidemment s'écrire $\dfrac{d\chi'_s}{d\omega_{k+1}}$, si l'on observe que la lettre a tient lieu du symbole $\overline{ak+1}$; V^0 est ainsi un semi-invariant symbolique.

Le terme principal du symbole a, dans V^0, est $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$, d'après la relation (7), et ce terme principal est multiplié par

(*) De la même manière que dans la formule (2'), on doit donner à i toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et à j les valeurs $0, 1, 2, \ldots, i$.

$\pm \frac{d\chi'_s}{d\omega_k}$ [formule (2')] (*). Faisons la somme des fonctions V^0 correspondant aux différents termes de

$$\psi'_s = \sum \frac{d\chi'_s}{d\omega_k}:$$

nous obtiendrons un semi-invariant $\Sigma\, V^0$, tel que $\pm\, \Sigma\, V^0$ et ψ_s ont le même terme principal $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$, multiplié par la même fonction ψ'_s.

85. Soit $a_1^{r_{11}} a_2^{r_{12}} \ldots a_n^{r_{1n}}$ le terme principal du symbole a dans le semi-invariant $\psi_s \mp \Sigma\, V^0$. La définition du terme principal conduit aux relations suivantes entre les nombres

$$r_n,\quad r_{n-1},\quad \ldots,\quad r_2,\quad r_1 \qquad \text{et} \qquad r_{1n},\quad r_{1,n-1},\quad \ldots,\quad r_{12},\quad r_{11}:$$

1° On a $r_{1n} \overline{\overline{<}} r_n$, et en général $r_{1i} \overline{\overline{<}} r_i$ si l'on a

$$r_{1n} = r_n,\quad r_{1n-1} = r_{n-1},\quad \ldots,\quad r_{1,i+1} = r_{i+1}.$$

2° Les termes correspondants des deux séries

$$r_n,\quad r_{n-1},\quad \ldots,\quad r_2,\quad r_1 \qquad \text{et} \qquad r_{1n},\quad r_{1n-1},\quad \ldots,\quad r_{12},\quad r_{11}$$

ne peuvent pas être tous égaux en même temps.

Les considérations qui ont été développées pour ψ_s sont applicables à $\psi_s \mp \Sigma V^0$; par conséquent, il existe une fonction $\pm\, \Sigma V'$, analogue à ΣV^0 et telle que si $a_1^{r_{21}} a_2^{r_{22}} \ldots a_n^{r_{2n}}$ est le terme principal de $\psi_s \mp \Sigma V^0 \mp \Sigma V'$, il existe entre les nombres r_{2i}, r_{1i} des relations analogues à celles qui ont lieu entre les exposants r_{1i}, r_i. En continuant de la même manière, on obtiendra des semi-invariants

$$\pm \sum V'',\quad \pm \sum V''',\quad \ldots,\quad \pm \sum V^{(t-1)}$$

tout à fait semblables à $\pm\, \Sigma V^0$ (**).

(*) On doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que $\Sigma_i\, i r_{i+1}$ est pair ou impair.

(**) Tous les signes + et — ne se correspondent pas nécessairement.

Soit $a_1^{r_{t1}} a_2^{r_{t2}} \ldots a_n^{r_{tn}}$ le terme principal du symbole a dans le semi-invariant

$$\psi_s^{(t)} = \psi_s \mp \sum V^0 \mp \sum V' \mp \cdots \mp \sum V^{(t-1)}, \tag{8}$$

supposé différent de zéro; les exposants r_{t1}, r_{t2}, ..., r_{tn} satisfont aux conditions suivantes :

1° On a $r_{tn} \overline{\overline{<}} r_{t-1,n}$;

2° On ne peut pas avoir $r_{ti} > r_{t-1,i}$ si les relations

$$r_{tn} = r_{t-1,n}, \quad r_{t,n-1} = r_{t-1,n-1}, \quad \ldots, \quad r_{t,i+1} = r_{t-1,i+1}$$

ont lieu simultanément;

3° On ne peut pas avoir en même temps les n égalités

$$r_{t,n} = r_{t-1,n}, \quad r_{t,n-1} = r_{t-1,n-1}, \quad \ldots, \quad r_{t1} = r_{t-1,1}.$$

Ces propriétés permettent d'établir que *pour une valeur suffisamment grande de* t, *on a* $\psi_s^{(t)} = 0$.

En effet, dans la supposition contraire, on aurait une suite illimitée de nombres r_{tn}, $r_{t,n-1}$, ..., r_{t1}. D'après la première condition indiquée ci-dessus, le nombre r_{tn} ne peut pas croître quand t augmente : il peut décroître, mais, à partir d'une certaine limite ($t > t'$), il conservera la même valeur.

Pour $t > t'$, le nombre $r_{t,n-1}$ ne peut pas augmenter en même temps que t; en conséquence, $r_{t,n}$ et $r_{t,n-1}$ auront des valeurs constantes quand t dépassera une certaine limite. On obtiendrait de proche en proche la même conclusion pour $r_{t,n-2}$, $r_{t,n-3}$, ..., r_{t1}. On aurait donc, pour une certaine valeur de t :

$$r_{tn} = r_{t-1,n}, \quad r_{t,n-1} = r_{t-1,n-1}, \quad \ldots, \quad r_{t1} = r_{t-1,1}.$$

D'après la troisième propriété des nombres r_{ti}, les égalités précédentes sont impossibles à moins que l'on ait $\psi_s^{(t)} = 0$.

Nous pouvons donc écrire, d'après la formule (8) :

$$\psi_s = \pm \sum V^0 \pm \sum V' \pm \cdots \pm \sum V^{(t-1)},$$

t étant un nombre convenable.

Le semi-invariant ψ_s, relatif à $k+1$ symboles $a1, a2, ..., \overline{ak+1}$, est donc une somme de semi-invariants V^0, V', ..., exprimables sous la forme $\dfrac{d\chi'_s}{d\omega_{k+1}}$.

Comme nous l'avons fait observer (§ 81), il résulte de là que tout semi-invariant relatif aux μ symboles $a1, a2, ..., a\mu$ est une somme de semi-invariants $\dfrac{d\chi'_s}{d\omega_\mu}$ définis par la formule (2).

Exemple. — Dans le cas de $\mu = 2$, $n \overline{\overline{>}} 3$, prenons

$$\psi_s = \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 & a1_3 \\ a2_1 & a2_2 & a2_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On trouve

$$\psi_s = \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 & a1_3 \\ a2_1 & a2_2 & a2_3 \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \dfrac{d}{dx1_3} \end{vmatrix} \chi'_s$$

$$+ \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 \\ a2_1 & a2_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1_1 & a1_2 & a1_3 \\ \dfrac{d}{dx1_1} & \dfrac{d}{dx1_2} & \dfrac{d}{dx1_3} \\ \dfrac{d}{dx2_1} & \dfrac{d}{dx2_2} & \dfrac{d}{dx2_3} \end{vmatrix} \chi''_s,$$

$$\chi'_s = \frac{1}{2} b_{x1} c_{x1}; \qquad \chi''_s = \frac{1}{4}(\pm b_{x1} c_{x2}).$$

86. Considérons maintenant les semi-invariants symboliques ψ_s relatifs à une forme quelconque représentée par

$$f \equiv (a1_{x1})^{\alpha 1} (a2_{x2})^{\alpha 2} \cdots (a\mu_{x\mu})^{\alpha\mu} \equiv \cdots \equiv \cdots;$$

d'après le théorème que nous venons de démontrer, ces semi-invariants s'expriment linéairement au moyen des fonctions $\dfrac{d\chi'_s}{d\omega_\mu}$.

Supposons que ψ_s représente la source d'un covariant primaire χ de degré u par rapport à la forme f; la fonction ψ_s contiendra u systèmes équivalents de symboles relatifs à f (§ 6). L'expression χ'_s contient tous les symboles compris dans ψ_s, à l'exception de $a1, a2, ..., a\mu$ (§ 81); par conséquent, χ'_s représente symboliquement un covariant primaire χ' de degré $u - 1$ par rapport à f.

D'après la comparaison des formules (1) et (2), le semi-invariant $\frac{d\chi'_s}{d\omega_\mu}$ représente, à part un facteur numérique, la source d'un covariant dérivé de f et de χ'. La réduction de ψ_s aux fonctions $\frac{d\chi'_s}{d\omega_\mu}$ établit donc que la source du covariant χ est une combinaison linéaire des sources de covariants dérivés $[\mathrm{R}(f, \chi')]$. Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème :

Tout covariant primaire χ, *de degré* u *par rapport à une forme* f, *est une somme de covariants dérivés obtenus au moyen de la forme* f *et de covariants primaires* χ', *du degré* u — 1 *par rapport à* f.

Nous pouvons appliquer ce théorème, en remplaçant u par $u - 1$, $u - 2$, ..., 2, 1. Par conséquent, la méthode des covariants dérivés permet d'obtenir les covariants primaires d'une forme f au moyen des covariants primaires indépendants de f. De même, les covariants primaires d'un système de formes $f, f_1, \ldots$ se déduisent des covariants primaires indépendants des différentes formes: ces derniers covariants sont nécessairement des constantes. Par suite, *tous les covariants primaires d'un système de formes quelconques s'obtiennent par la méthode des covariants dérivés.*

Puisque les fonctions invariantes sont réductibles aux covariants primaires, les résultats que nous avons obtenus permettent de déterminer toutes les fonctions invariantes de formes quelconques à une ou plusieurs séries de n variables.

Cas particulier. — Si l'on suppose $n = 2$, les covariants dérivés de formes à une série de deux variables sont les *transvections* (§ 17). On retrouve, par l'application des résultats précédents, le mode de génération que M. Gordan a fait connaître pour les covariants de formes binaires (*).

(*) Voir, pour ce cas particulier : Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 102 ; Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, t. II, p. 48 ; Camille Jordan, *Mémoire sur les covariants de formes binaires* (Journal de Liouville, 3e série, t. II et V).

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES COVARIANTS PRIMAIRES LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS.

---

87. Nous nous proposons de rechercher le nombre des covariants primaires linéairement indépendants, de degrés donnés par rapport aux variables et par rapport aux coefficients de formes quelconques (*). Soit χ un covariant primaire de poids π et des degrés $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ pour les séries de variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; la source de χ est un semi-invariant ψ, qui a les poids

$$\pi_1 = m_1 + \pi, \quad \pi_2 = m_2 + \pi, \quad \dots, \quad \pi_{n-1} = m_{n-1} + \pi, \quad \pi_n = \pi,$$

pour les indices $1, 2, \dots, n$; les fonctions χ et ψ sont des mêmes degrés par rapport aux coefficients de formes algébriques. De plus, si des covariants primaires χ sont linéairement indépendants ou non, il en est de même des sources ψ et réciproquement (§ 43, Cor. III). En conséquence, nous avons à résoudre

(*) Dans le cas de $n = 2$, les covariants primaires sont les fonctions invariantes à une seule série de variables ; la détermination du nombre de ces covariants primaires particuliers est due à M. Cayley. Le résultat indiqué par l'illustre Géomètre a été établi d'une manière complètement rigoureuse par M. Sylvester ; plus récemment, il a été obtenu de différentes manières. Voir : Cayley, *Philosophical Transactions,* vol. CXLV ; Sylvester, *Journal de Crelle,* t. LXXXV ; Capelli, *Memorie della R. Acad. dei Lincei,* 1882 ; Hilbert, *Mathematische Annalen,* t. XXX ; Stroh, *Mathematische Annalen,* t. XXXI ; J. Deruyts, *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège,* 2e série, t. XV.

la question suivante : *Trouver le nombre des semi-invariants* ψ, *linéairement indépendants, qui sont de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *et de degrés donnés par rapport aux coefficients de formes algébriques.*

88. Soit g une fonction isobarique des coefficients de formes algébriques, pour laquelle on a

$$(3, 2)\, g = 0, \quad (4, 3)\, g = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1)\, g = 0. \qquad (1)$$

D'après une propriété que nous avons établie (§ 64), la fonction g est une combinaison linéaire des coefficients de covariants primaires : nous écrirons

$$g = \mathfrak{L}_1\chi'_1 + \mathfrak{L}_2\chi'_2 + \cdots + \mathfrak{L}_r\chi'_r,$$

en indiquant par $\mathfrak{L}_1\chi'_1, \mathfrak{L}_2\chi'_2, \ldots, \mathfrak{L}_r\chi'_r$ des combinaisons linéaires isobariques des coefficients de covariants primaires $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_r$: nous pouvons supposer que $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_r$ sont linéairement indépendants.

Nous aurons, d'après les équations (1) :

$$\left.\begin{array}{c}(i+1, i)\,\mathfrak{L}_1\chi'_1 + (i+1, i)\,\mathfrak{L}_2\chi'_2 + \cdots + (i+1, i)\,\mathfrak{L}_r\chi'_r = 0,\\ i = 2, 3, \ldots, n-1.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Chacune des fonctions $(i+1, i)\,\mathfrak{L}\chi'$ est exprimable linéairement au moyen des coefficients de χ' (§ 43, *Rem.*); d'autre part, entre les coefficients de covariants primaires $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_r$ linéairement indépendants, il ne peut exister aucune relation particulière du premier degré (§ 66). On doit donc avoir, d'après les formules (2) :

$$(i+1, i)\,\mathfrak{L}_1\chi'_1 = 0, \quad (i+1, i)\,\mathfrak{L}_2\chi'_2 = 0, \quad \ldots, \quad (i+1, i)\,\mathfrak{L}_r\chi'_r = 0,$$
$$i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Par suite, *le nombre des solutions* g, *linéairement indépendantes des équations*

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1) = 0,$$

est égal au nombre des fonctions $\mathfrak{L}\chi'$ *satisfaisant aux mêmes* *équations et correspondant à des covariants primaires χ' linéairement indépendants;* il est évident, du reste, que les fonctions g et $\mathfrak{L}\chi'$ doivent être des mêmes poids et des mêmes degrés par rapport aux coefficients des formes algébriques.

89. Recherchons actuellement le nombre des fonctions $\mathfrak{L}\chi'$ correspondant à un covariant primaire donné χ' et pour lesquelles on a

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad ..., \quad (n, n-1) = 0.$$

Soient

$$\pi'_1, \quad \pi'_2, \quad ..., \quad \pi'_{n-1}, \quad \pi'_n,$$

les poids de la source ψ' du covariant χ'. Au lieu de χ', nous pouvons considérer le covariant primaire

$$\chi^0 = a1_{x1}^{\pi'_1 - \pi'_2} (\pm a1_{x1} a2_{x2})^{\pi'_2 - \pi'_3} ...$$
$$... (\pm a1_{x1} ... an-1_{xn-1})^{\pi'_{n-1} - \pi'_n} (\pm a1_1 a2_2 ... an_n)^{\pi'_n},$$

qui est des mêmes degrés et de même poids et qui se rapporte aux formes linéaires $a1_x$, $a2_x$, ..., an_x; nous avons vu, en effet, que si la fonction $\mathfrak{L}\chi'$ satisfait à une condition exprimable linéairement au moyen des coefficients de χ', la fonction analogue $\mathfrak{L}\chi^0$ satisfait à la même condition, et réciproquement (§ 66).

La fonction isobarique $\mathfrak{L}\chi^0$, qui doit satisfaire aux équations

$$(i+1, i)\,\mathfrak{L}\chi^0 = 0 \; (i = 2, 3, ..., n-1),$$

s'écrira, d'après la valeur de χ^0 :

$$\mathfrak{L}\chi^0 = (\pm a1_1 a2_2 ... an_n)^{\pi'_n} . \mathcal{G}_{n-1}; \tag{5}$$

$\mathcal{G}_{n-1}$ est alors une fonction homogène et isobarique qui dépend seulement des coefficients

$$\begin{array}{llll} a1_1, & a1_2, & ..., & a1_n, \\ a2_1, & a2_2, & ..., & a2_n, \\ . & . & . & . \\ an-1_1, & an-1_2, & ..., & an-1_n, \end{array}$$

et qui satisfait aux équations

$$(3, 2)\,\mathcal{G}_{n-1}=0, \quad (4, 3)\,\mathcal{G}_{n-1}=0, \quad \ldots, \quad (n, n-1)\,\mathcal{G}_{n-1}=0, \qquad (4)$$

$$a1\,\frac{d}{da2}\mathcal{G}_{n-1}=0, \quad a2\frac{d}{da3}\mathcal{G}_{n-1}=0, \quad \ldots, \quad an-2\frac{d}{dan-1}\mathcal{G}_{n-1}=0. \qquad (5)$$

90. Nous établirons que *la fonction* $\mathcal{G}_{n-1}$ *est un produit de déterminants*

$$(\pm\, a1_2 a2_3 \ldots ai_{i+1}), \quad (\pm\, a1_1 a2_2 \ldots ai_i),$$

pour lesquels i *a les valeurs* 1, 2, ..., n — 1.

Cette propriété est évidente pour $n=2$; car $\mathcal{G}_1$ se réduit alors à un produit de puissances de $a1_1$ et de $a1_2$. Nous établirons la propriété énoncée, en la supposant exacte pour $\mathcal{G}_{n-2}$.

D'après les équations (4), $\mathcal{G}_{n-1}$ peut être considéré comme une somme de semi-invariants des formes linéaires

$$a1_2x_2 + a1_3x_3 + \cdots + a1_nx_n,$$
$$a2_2x_2 + a2_3x_3 + \cdots + a2_nx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$an-1_2x_2 + \cdots + an-1_nx_n,$$

relatives aux $n-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$; conséquemment (§ 38), $\mathcal{G}_{n-1}$ est une somme de produits de coefficients h_1 et de déterminants d'ordre $i=1, 2, \ldots, n-1$, tels que $(\pm\, h_2k_3 \ldots l_{i+1})$; $h, k, \ldots, l$ désignant des séries de coefficients comprises dans la suite $a1, a2, \ldots, an-1$. Pour $i=n-1$, le seul déterminant à considérer est $(\pm\, a1_2a2_3 \ldots an-1_n)$; on peut donc écrire

$$\mathcal{G}_{n-1}=(\pm\, a1_2a2_3 \ldots an-1_n)^{\varepsilon}\cdot\mathcal{G}';$$

ε désignera un nombre positif ou nul et $\mathcal{G}'$ représentera une fonction homogène et isobarique des coefficients

$$\begin{array}{llll} a1_1, & a1_2, & \ldots, & a1_{n-1}, \\ a2_1, & a2_2, & \ldots, & a2_{n-1},\ \text{etc.}, \\ an-1_1, & an-1_2, & \ldots, & an-1_{n-1}. \end{array}$$

D'après les équations (4) et (5), on a

$$(3, 2)\,\mathcal{G}' = 0, \quad (4, 3)\,\mathcal{G}' = 0, \quad \ldots, \quad (n-1, n-2)\,\mathcal{G}' = 0, \qquad (4')$$

$$a1\frac{d}{da2}\,\mathcal{G}' = 0, \quad a2\frac{d}{da3}\,\mathcal{G}' = 0, \quad \ldots, \quad an-2\,\frac{d}{dan-1}\,\mathcal{G}' = 0. \qquad (5')$$

Il résulte des formules (5′) que $\mathcal{G}'$ est un agrégat de déterminants analogues à

$$(\pm\, a1_{t1}a2_{t2} \ldots ai_{ti}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

les lettres t désignant des nombres compris dans la suite 1, 2, ..., $n-1$ (§ 42). Pour $i = n-1$, le seul déterminant possible est $(\pm\, a1_1 a2_2 \ldots an-1_{n-1})$; nous écrirons en conséquence

$$\mathcal{G}' = (\pm\, a1_1a2_2 \ldots an-1_{n-1})^{\varepsilon_1} \cdot \mathcal{G}'' ;$$

$\mathcal{G}''$ est alors une fonction des coefficients

$$\begin{array}{llll}
a1_1, & a1_2, & \ldots, & a1_{n-1}, \\
a2_1, & a2_2, & \ldots, & a2_{n-1}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
an-2_1, & an-2_2, & \ldots, & an-2_{n-1}.
\end{array}$$

D'après les formules (4′) et (5′), la quantité $\mathcal{G}''$ est une solution isobarique et homogène des équations

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n-1, n-2) = 0,$$

$$a1\frac{d}{da2} = 0, \quad a2\frac{d}{da3} = 0, \quad \ldots, \quad an-3\frac{d}{dan-2} = 0;$$

ainsi, $\mathcal{G}''$ peut être représenté par la caractéristique $\mathcal{G}_{n-2}$ et on a

$$\mathcal{G}_{n-1} = (\pm\, a1_2a2_3 \ldots an-1_n)^{\varepsilon} \cdot (\pm\, a1_1a2_2 \ldots an-1_{n-1})^{\varepsilon_1} \cdot \mathcal{G}_{n-2}.$$

Par supposition, $\mathcal{G}_{n-2}$ est un produit de déterminants

$$(\pm\, a1_1a2_2 \ldots ai_i), \quad (\pm\, a1_2a2_3 \ldots ai_{i+1}),$$

pour lesquels on a $0 < i < n - 1$; en conséquence, $\mathcal{G}_{n-1}$ est un produit de déterminants

$$(\pm\, a1_1 a2_2 \ldots ai_i) \quad \text{et} \quad (\pm\, a1_2 a2_3 \ldots ai_{i+1}),$$

où l'on a $0 < i < n$. C'est le résultat que nous avions annoncé.

91. Reprenons maintenant la formule (3) : d'après l'expression de $\mathcal{G}_{n-1}$, *toute combinaison linéaire et isobarique* $\mathcal{L}\chi^0$ *des coefficients de* χ^0, *qui satisfait aux relations*

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1) = 0,$$

peut s'écrire

$$\mathcal{L}\chi^0 = a1_1^{\varepsilon_{11}} a1_2^{\varepsilon_{12}} (\pm\, a1_1 a2_2)^{\varepsilon_{21}} (\pm\, a1_2 a2_3)^{\varepsilon_{22}} \ldots$$
$$\ldots (\pm\, a1_1 \ldots ai_i)^{\varepsilon_{i1}} (\pm\, a1_2 \ldots ai_{i+1})^{\varepsilon_{i2}} \ldots (\pm\, a1_1 a2_2 \ldots an_n)^{\pi'_n}.$$

La fonction a les mêmes degrés que χ^0, par rapport aux coefficients $a1$, $a2$, ..., an; on doit donc avoir

$$\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2} = \pi'_i - \pi'_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots n-1); \tag{6}$$

du reste, les exposants ε_{i1}, ε_{i2} ne peuvent pas être supposés négatifs.

Si la fonction $\mathcal{L}\chi^0$ a les poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ pour les indices $1, 2, \ldots, n$, on doit avoir, d'après les équations (6) :

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} + \cdots + \varepsilon_{n-1,1} + \pi'_n,\\
\pi_2 &= \varepsilon_{12} + \pi'_2,\\
\pi_3 &= \varepsilon_{22} + \pi'_3,\\
\pi_i &= \varepsilon_{i-1,2} + \pi'_i,\\
\pi_n &= \varepsilon_{n-1,2} + \pi'_n.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Les valeurs de ε_{i1}, ε_{i2} sont complètement déterminées par les équations (6) et (7); pour que ces valeurs ne soient pas négatives, comme il convient, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left.\begin{array}{c}
\pi_n - \pi'_n \geqq 0, \quad \pi_{n-1} - \pi'_{n-1} \geqq 0, \quad \ldots, \quad \pi_2 - \pi'_2 \geqq 0,\\
\pi'_{n-1} - \pi_n \geqq 0, \quad \pi'_{n-2} - \pi_{n-1} \geqq 0, \quad \ldots, \quad \pi'_1 - \pi_2 \geqq 0,\\
\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n = \pi'_1 + \pi'_2 + \cdots + \pi'_n.
\end{array}\right\} \tag{8}$$

Les nombres $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ sont les poids du semi-invariant

$$a1_1^{\pi'_1 - \pi'_2}(\pm a1_1 a2_2)^{\pi'_2 - \pi'_3} \ldots,$$

qui est la source de χ^0 (§ 89); le dernier résultat que nous avons obtenu peut donc s'énoncer de la manière suivante : « Il existe *une* fonction $\mathfrak{L}\chi^0$ de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, pour laquelle on a

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1) = 0,$$

si les poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ de la source de χ^0 vérifient les relations (8); si les relations (8) n'ont pas lieu, il n'existe aucune fonction $\mathfrak{L}\chi^0$ satisfaisant aux conditions indiquées. »

Désignons, comme précédemment, par $\mathfrak{L}\chi'$ une combinaison linéaire isobarique des coefficients d'un covariant primaire χ' : il existe le même nombre de fonctions $\mathfrak{L}\chi'$ et $\mathfrak{L}\chi^0$ pour lesquelles on a $(3, 2) = 0, \ldots (n, n-1) = 0$ (voir § 88).

Par conséquent, *il existe* une *fonction* $\mathfrak{L}\chi'$ *de poids* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, *qui est solution des équations*

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1) = 0,$$

si les poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ *de la source de* χ' *satisfont aux relations* (8); *dans le cas contraire, il n'existe aucune fonction* $\mathfrak{L}\chi'$ *vérifiant les conditions énoncées.*

92. Désignons par la caractéristique g les fonctions homogènes de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, qui dépendent seulement des coefficients de formes $f, f_1, \ldots$, et qui satisfont aux équations

$$(3, 2) = 0, \quad (4, 3) = 0, \quad \ldots, \quad (n, n-1) = 0.$$

Le nombre des fonctions g, linéairement indépendantes, est égal au nombre des fonctions $\mathfrak{L}\chi'$ qui satisfont aux mêmes conditions (§ 88).

Soit $[\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n]$ le nombre des semi-invariants linéairement indépendants, de poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ et des degrés $r, r_1, \ldots$ pour les formes $f, f_1, \ldots$; soit $[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)]$ le nombre des fonctions g des mêmes degrés $r, r_1, \ldots$ par rapport à $f, f_1, \ldots$ D'après le théorème énoncé au paragraphe précédent, on a

$$\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right] = \sum \left[\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\right], \tag{9}$$

en étendant la sommation à tous les systèmes de valeurs de π'_1, $\pi'_2, \ldots, \pi'_n$, qui satisfont aux relations (8).

93. Les différences $\pi_2 - \pi_3, \ldots, \pi_i - \pi_{i+1}, \ldots$ ne peuvent pas être négatives, parce que les fonctions g ont les poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ et satisfont aux équations $(3, 2)\, g = 0, \ldots, (i+1, i)\, g = 0, \ldots$ (voir § 26). Nous ferons usage de la formule (9) en supposant $\pi_1 \geqq \pi_2$: soient alors $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ des nombres positifs ou nuls pour lesquels on a

$$\zeta_2 + \zeta_3 + \cdots + \zeta_n = \zeta_1$$

$$\zeta_2 \leqq \pi_2 - \pi_3, \quad \ldots, \quad \zeta_i \leqq \pi_i - \pi_{i+1}, \quad \ldots, \quad \zeta_n \leqq \pi_n;$$

d'après les formules (8), on pourra écrire :

$$\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right] = \sum \left[\pi_1 + \zeta_1, \pi_2 - \zeta_2, \pi_3 - \zeta_3, \ldots, \pi_n - \zeta_n\right],$$

en donnant à $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ toutes les déterminations possibles.

On déduit de là que le nombre

$$\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right]' = \left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right] - \left[(\pi_1 + 1, \pi_2 - 1, \pi_3 \ldots \pi_n)\right]$$

est égal à

$$\left[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\right] + \sum \left[\pi_1 + \zeta_1, \pi_2 - \zeta_2, \ldots, \pi_n - \zeta_n\right],$$

si l'on suppose $\zeta_1 \geqq 1$, $\zeta_2 = 0$.

On est conduit de même à considérer des suites de nombres définis par la formule

$$\begin{aligned}\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right]^{(j)} = &\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{j+1}, \ldots, \pi_n)\right]^{(j-1)} \\ &- \left[(\pi_1 + 1, \pi_2, \ldots, \pi_{j+1} - 1, \ldots, \pi_n)\right]^{(j-1)}.\end{aligned}$$

On trouve que $\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right]^{(j)}$ a pour valeur

$$\left[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\right] + \sum \left[\pi_1 + \zeta_1, \pi_2 - \zeta_2, \ldots, \pi_n - \zeta_n\right],$$

si l'on suppose

$$\zeta_1 \gtreqless 1, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad .., \quad \zeta_{j+1} = 0.$$

Pour $j = n - 1$, nous obtenons :

$$\left[(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)\right]^{(n-1)} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n];$$

nous déduisons de là, d'après les réductions précédentes :

$$[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n] = \sum(-1)^{\varepsilon}\left[(\pi_1 + \varepsilon, \pi_2 - \varepsilon_2, \pi_3 - \varepsilon_3, \ldots, \pi_n - \varepsilon_n)\right]; \quad (10)$$

dans cette formule, on a $\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n$ et la sommation se rapporte aux termes que l'on obtient en donnant, de toutes les manières possibles, à $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, les valeurs 0 et 1.

94. Supposons que l'on ait symboliquement :

$$f \equiv a1_{x1}^{\alpha 1} a2_{x2}^{\alpha 2} \ldots a\mu_{x\mu}^{\alpha\mu} \equiv \cdots,$$

$$f_1 \equiv b1_{x1}^{\beta 1} b2_{x2}^{\beta 2} \ldots b\nu_{x\nu}^{\beta\nu} \equiv \cdots \text{ etc.}$$

D'après les équations (1), les fonctions g, relatives à $f, f_1, \ldots$ peuvent être considérées comme combinaisons linéaires des semi-invariants de formes à séries de $n - 1$ variables $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \ldots$ Les formes dont il s'agit sont représentées par

$$\mathcal{F} \equiv a1_1^{\alpha 1_1} a2_1^{\alpha 2_1} \ldots a1_{x1}^{\alpha' 1} a2_{x2}^{\alpha' 2} \cdots \equiv \cdots,$$

$$\mathcal{F}_1 \equiv b1_1^{\beta 1_1} b2_1^{\beta 2_1} \ldots b1_{x1}^{\beta' 1} b2_{x2}^{\beta' 2} \cdots \equiv \cdots \text{ etc. (*)},$$

si l'on prend

$$\alpha' i = \alpha i - \alpha i_1 \gtreqless 0, \quad \beta' i = \beta i - \beta i_1 \gtreqless 0, \text{ etc.}$$

$$a_x = a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n, \quad b_x = b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \text{ etc.}$$

Les fonctions g ont été supposées des degrés $r, r_1, \ldots$ pour

(*) Nous comprenons ici parmi les *formes* des systèmes $(\mathcal{F}), (\mathcal{F}_1), \ldots,$ les quantités représentées par

$$a1_1^{\alpha 1} a2_1^{\alpha 2} \ldots a\mu_1^{\alpha\mu}, \quad b1_1^{\beta 1} b2_1^{\beta 2} \ldots b\nu_1^{\beta\nu}, \text{ etc.}$$

les formes $f, f_1, \ldots$; par conséquent, le nombre que nous avons désigné par $[(\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n)]$ (§ 92) est le nombre des semi-invariants linéairement indépendants, de poids $\pi'_2, \pi'_3, \ldots, \pi'_n$ et des degrés $r, r_1, \ldots$ pour les *groupes* de formes $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_1)$, ... à séries de $n - 1$ variables.

D'un autre côté, $[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]$ est le nombre des semi-invariants qui sont linéairement indépendants, de poids $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ et des degrés $r, r_1, \ldots$ par rapport aux formes $f, f_1, \ldots$

Ainsi, *on obtient par la relation* (10) *le nombre des semi-invariants linéairement indépendants pour des formes à séries de* $\mathfrak{N} = \mathrm{n}$ *variables, quand la détermination correspondante est connue dans le cas de* $\mathfrak{N} = \mathrm{n} - 1$.

De proche en proche, la question peut être ramenée au cas de $\mathfrak{N} = 1$, pour lequel toute fonction des coefficients est un semi-invariant.

Il y a lieu de remarquer que pour établir l'équation (10), on a supposé $\pi_1 \overline{\overline{>}} \pi_2 \overline{\overline{>}} \pi_3 \ldots \overline{\overline{>}} \pi_n$. Quand les relations précédentes ne sont pas satisfaites, le nombre $[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]$ des semi-invariants est égal à zéro (§ 33, *Rem.*).

Cas particuliers. — I. Si l'on prend $n = 2$, notre méthode concorde avec celle que M. Hilbert a exposée pour les formes binaires à une seule série de variables.

II. Quand on suppose $\pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_n$, on obtient par la relation (10) le nombre des invariants linéairement indépendants d'un système quelconque de formes.

Par exemple, prenons le cas des invariants du troisième degré pour une forme biquadratique ternaire $f \equiv a_x^4 \equiv a_x'^4 \equiv a_x''^4$; nous aurons $\pi_1 = 4$. Le nombre des invariants considérés a pour valeur

$$[4, 4, 4] = \big[(4, 4, 4)\big] - \big[(5, 4, 3)\big] - \big[(5, 3, 4)\big] + \big[(6, 3, 3)\big].$$

Dans cette expression, $[(4, 4, 4)]$ est le nombre des invariants de poids 4 et de degré total 3 pour les formes binaires

$$\mathcal{F} \equiv a_x^4 \equiv a_x'^4 \equiv a_x''^4, \quad \mathcal{F}' \equiv a_1 a_x^3 \equiv a'_1 a_x'^3 \equiv a''_1 a_x''^3, \quad \mathcal{F}'' \equiv a_1^2 a_x^3 \equiv \cdots,$$

$$\mathcal{F}''' \equiv a_1^3 a_x \equiv a_1'^3 a'_x \equiv a_1''^3 a''_x, \quad \mathcal{F}^{\text{IV}} \equiv a_1^4 \equiv a_1'^4 \equiv a_1''^4;$$

les invariants dont il s'agit peuvent être représentés symboliquement par

$$a_1''^4 (\pm a_2 a_2')^4, \quad a_1''^3 a_1' (\pm a_2 a_3')^3 (\pm a_2 a_3''),$$

$$a_1''^2 a_1'^2 (\pm a_2 a_3')^2 (\pm a_2 a_3'')^2, \quad a_1''^2 a_1 a_1' (\pm a_2 a_3')^2 (\pm a_2 a_3'') (\pm a_2' a_3'');$$

on obtient ainsi $[(4, 4, 4)] = 4$. Semblablement $[(5, 4, 3)]$ est le nombre des semi-invariants de degré total 3 pour les formes $\mathcal{F}$ et de poids 4, 3 pour les indices 2, 3. On trouve $[(5, 4, 3)] = 4$ et de même $[(5, 3, 4)] = 0$, $[(6, 3, 3)] = 1$. On a donc $[4, 4, 4] = 1$, ce qui est exact, car la forme f a un seul invariant du troisième degré : $I \equiv (\pm a_1 a_2' a_3'')^4$.

Expression du nombre $[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]$.

95. Soit $\mathcal{E}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ un nombre qui dépend de π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_n$, et soit

$$\omega = \sum v1_{j_1} \, v2_{j_2} \ldots vn_{j_n}$$

une fonction linéaire par rapport à chacune des séries de paramètres

$$\begin{array}{cccc} v1_1, & v1_2, & \ldots, & v1_n, \\ v2_1, & v2_2, & \ldots, & v2_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ vn_1, & vn_2, & \ldots, & vn_n. \end{array}$$

Nous définirons le nombre

$$\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\omega(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

par la formule

$$\mathcal{E}_\omega = \sum \mathcal{E}(\pi_1 + j_1 - 1, \ \pi_2 + j_2 - 2, \ \ldots, \ \pi_n + j_n - n).$$

Dans ces conditions, on a

$$\mathcal{E}_\omega(\pi_1 + t_1, \pi_2 + t_2, \ldots, \pi_n + t_n) = \mathcal{E}_{\omega_1}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n), \quad (11)$$

en supposant

$$n + 1 > j_i + t_i > 0$$

et

$$\omega_1 = \sum v1_{j_1+t_1} v2_{j_2+t_2} \cdots vn_{j_n+t_n};$$

de même, si ω', ω'', ... sont des fonctions linéaires analogues à ω, on peut écrire

$$\mathcal{E}_{\omega'} + \mathcal{E}_{\omega''} + \cdots = \mathcal{E}_{\omega'+\omega''+\cdots} \qquad (11')$$

96. Soit $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ le nombre des fonctions qui sont indépendantes des variables et satisfont aux conditions : 1° d'être de degrés r, r_1, ... pour les coefficients des formes f, f_1, ...; 2° d'être de poids π_1, π_2, ..., π_n; 3° de n'avoir entre elles aucune relation du premier degré.

Prenons

$$\Delta = \begin{vmatrix} v1_1 & v1_2 & \ldots & v1_n \\ v2_1 & v2_2 & \ldots & v2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ vn_1 & vn_2 & \ldots & vn_n \end{vmatrix};$$

nous voulons établir que l'équation

$$[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n] = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}_\Delta \ (*) \qquad (12)$$

détermine le nombre des semi-invariants linéairement indépendants, de degrés r, r_1, ... pour les formes f, f_1, ... et de poids π_1, π_2, ..., π_n, si l'on a $\pi_1 \overline{\overline{>}} \pi_2 \overline{\overline{>}} \pi_3 \ldots \overline{\overline{>}} \pi_n$. Les cas pour lesquels on n'a pas $\pi_1 \overline{\overline{>}} \pi_2 \ldots \overline{\overline{>}} \pi_n$ sont sans importance, puisque alors on a $[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n] = 0$.

Si l'on suppose $n = 2$ et $\pi_1 \overline{\overline{>}} \pi_2$, on a, par la formule (10) :

$$[\pi_1, \pi_2] = [(\pi_1, \pi_2)] - [(\pi_1 + 1, \pi_2 - 1)];$$

(*) Dans le cas de $n = 3$, on a

$$\Delta = v1_1 v2_2 v3_3 - v1_1 v2_3 v3_2 - v1_2 v2_1 v3_3 + v1_2 v2_3 v3_1 + v1_3 v2_1 v3_2 - v1_3 v2_2 v3_1,$$

et le nombre $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}_\Delta$ a pour expression

$$\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} - \{\pi_1, \pi_2 + 1, \pi_3 - 1\} - \{\pi_1 + 1, \pi_2 - 1, \pi_3\}$$
$$+ \{\pi_1 + 1, \pi_2 + 1, \pi_3 - 2\} + \{\pi_1 + 2, \pi_2 - 1, \pi_3 - 1\} - \{\pi_1 + 2, \pi_2, \pi_3 - 2\}.$$

d'après la définition des nombres

$$[(\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_n)] \quad \text{et} \quad \{\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_n\},$$

on obtient :

$$[(\pi_1,\ \pi_2)] = \{\pi_1,\ \pi_2\}, \quad [(\pi_1+1,\ \pi_2-1)] = \{\pi_1+1,\ \pi_2-1\};$$

on déduit de là :

$$[\pi_1,\ \pi_2] = \{\pi_1,\ \pi_2\}_\Delta,$$

en prenant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \upsilon 1_1 & \upsilon 1_2 \\ \upsilon 2_1 & \upsilon 2_2 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, la formule (12) est vérifiée pour $n = 2$; nous l'établirons dans le cas général, en la considérant comme exacte pour des formes à séries de $n - 1$ variables. A cet effet, nous ferons usage de l'équation (10); nous rechercherons d'abord l'expression des nombres $[(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \ldots,\ \pi'_n)]$.

97. Par définition (§ 92), $[(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \ldots,\ \pi'_n)]$ est le nombre des fonctions qui jouissent des propriétés : 1° d'être de poids π'_1, π'_2, .., π'_n; 2° d'être de degrés r, r_1, ... pour les coefficients des formes f, f_1, ...; 3° de s'exprimer comme semi-invariants linéairement indépendants, par rapport aux groupes de formes $(\mathscr{F})$, $(\mathscr{F}_1)$, ... à séries de $n - 1$ variables.

L'égalité (12) est considérée comme exacte pour des formes à séries de $n - 1$ variables; en supposant $\pi'_2 \overline{\overline{>}} \pi'_3 \overline{\overline{>}} \ldots \overline{\overline{>}} \pi'_n$, on peut donc écrire :

$$[(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \ldots,\ \pi'_n)] = \{(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \ldots,\ \pi'_n)\}_{\upsilon 1_1 \Delta'};$$

dans cette formule, on a :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \upsilon 2_2 & \upsilon 2_3 & \ldots & \upsilon 2_n \\ \upsilon 3_2 & \upsilon 3_3 & \ldots & \upsilon 3_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \upsilon n_2 & \upsilon n_3 & \ldots & \upsilon n_n \end{vmatrix}.$$

et $\{(\pi'_1,\ \pi'_2,\ \ldots,\ \pi'_n)\}$ désigne le nombre des fonctions linéairement indépendantes, de poids $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n$ et des degrés $r, r_1, \ldots$ pour les groupes de formes $(\mathcal{F}), (\mathcal{F}_1), \ldots$ D'après la définition des groupes $(\mathcal{F}), \ldots$ (voir § 94), les formes $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \ldots$ sont des fonctions linéaires des coefficients de $f, f_1, \ldots$ Par suite, on a :

$$\{(\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n)\} = \{\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\},$$

puis

$$[(\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n)] = \{\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\}_{\upsilon 1_1 . \Delta'}. \tag{10'}$$

Pour obtenir la dernière formule, nous avons supposé $\pi'_2 \overline{\overline{>}} \pi'_3 \ldots \overline{\overline{>}} \pi'_n$; quand ces relations ne sont pas vérifiées, l'équation (10′) n'a plus lieu en général : le premier membre est égal à zéro, le second membre n'est pas toujours nul. Toutefois, si pour une valeur de i supérieure à 1, on a $\pi'_i = \pi'_{i+1} - 1$, la formule (10′) est encore exacte. En effet, on peut écrire

$$\upsilon 1_1 \Delta' = \upsilon 1_1 \sum \varepsilon \upsilon 2_h \upsilon 3_k \ldots (\upsilon i_r \upsilon i + 1_s - \upsilon i_s \upsilon i + 1_r) \ldots;$$

$$\{\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\}_{\upsilon 1_1 \Delta'} = \{\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_{i+1} - 1, \pi'_{i+1}, \ldots, \pi'_n\}_{\upsilon 1_1 \Delta'}$$

$$= \sum \varepsilon \{\pi'_1, \pi'_2 + h - 2, \ldots, \pi'_{i+1} + r - i - 1, \pi'_{i+1} + s - i - 1, \ldots\}$$

$$- \sum \varepsilon \{\pi'_1, \pi'_2 + h - 2, \ldots, \pi'_{i+1} + s - i - 1, \pi'_{i+1} + r - i - 1, \ldots\};$$

si l'on observe que les nombres $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ ne sont pas modifiés par les permutations de $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, on obtient dans le cas actuel

$$\{\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\}_{\upsilon 1_1 \Delta'} = 0.$$

98. L'équation (10), dans laquelle on a supposé $\pi_1 \overline{\overline{>}} \pi_2 \ldots \overline{\overline{>}} \pi_n$, peut s'écrire :

$$[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n] = \sum_{\varepsilon=0}^{n-1} (-1)^\varepsilon \sum{}' [(\pi_1 + \varepsilon, \pi_2 - \varepsilon_2, \pi_3 - \varepsilon_3, \ldots, \pi_n - \varepsilon_n)];$$

la sommation Σ' doit alors se rapporter à tous les termes obtenus en donnant à $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ les valeurs 0 ou 1, de telle manière que l'on ait $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon$.

Prenons

$$\pi'_2 = \pi_2 - \varepsilon_2, \quad \pi'_3 = \pi_3 - \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \pi'_n = \pi_n - \varepsilon_n;$$

il résulte des relations $\pi_1 \geqq \pi_2 \dots \geqq \pi_n$ que si l'on n'a pas $\pi'_2 \geqq \pi'_3 \dots \geqq \pi'_n$, il existe un nombre i supérieur à l'unité, pour lequel on a $\pi'_i = \pi'_{i+1} - 1$. Conséquemment, on peut toujours écrire, d'après la formule (10') :

$$\sum{}'\left[(\pi_1+\varepsilon, \pi_2-\varepsilon_2, \dots, \pi_n-\varepsilon_n)\right] = \sum{}' \} \pi_1+\varepsilon, \pi_2-\varepsilon_2, \dots, \pi_n-\varepsilon_n \{_{\upsilon 1_1 \Delta'}.$$

Si l'on prend

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \upsilon 2_{2-\varepsilon_2} & \upsilon 2_{3-\varepsilon_2} & \dots & \upsilon 2_{n-\varepsilon_2} \\ \upsilon 3_{2-\varepsilon_3} & \upsilon 3_{3-\varepsilon_3} & \dots & \upsilon 3_{n-\varepsilon_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \upsilon n_{2-\varepsilon_n} & \upsilon n_{3-\varepsilon_n} & \dots & \upsilon n_{n-\varepsilon_n} \end{vmatrix},$$

et si l'on tient compte des formules générales (11) et (11'), on obtient successivement :

$$\sum{}'\left[(\pi_1+\varepsilon, \pi_2-\varepsilon_2, \dots, \pi_n-\varepsilon_n)\right] = \} \pi_1+\varepsilon, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n \{_{\Sigma' \upsilon 1_1 \Delta''},$$

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n] = \sum_{\varepsilon=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon} \} \pi_1+\varepsilon, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n \{_{\Sigma' \upsilon 1_1 \Delta''}. \quad (10'')$$

99. Désignons par $\mathfrak{Q}$ le tableau rectangulaire

$$\begin{Vmatrix} \upsilon 2_1 & \upsilon 2_2 & \dots & \upsilon 2_n \\ \upsilon 3_1 & \upsilon 3_2 & \dots & \upsilon 3_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \upsilon n_1 & \upsilon n_2 & \dots & \upsilon n_n \end{Vmatrix};$$

d'après les valeurs de $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$, les déterminants Δ'' ont ε rangées composées des $n-1$ premiers termes des rangées correspondantes de $\mathfrak{Q}$ et $n-1-\varepsilon$ rangées composées des $n-1$ derniers termes des rangées restantes de $\mathfrak{Q}$; de plus, la somme $\Sigma'\Delta''$ se rapporte à tous les déterminants Δ'' que l'on peut ainsi obtenir. Cette remarque permet d'établir l'égalité

$$\sum{}' \Delta'' = \Delta_\varepsilon,$$

si l'on pose

$$\Delta_\varepsilon = \begin{vmatrix} v2_1 & v2_2 & \dots & v2_\varepsilon & v2_{\varepsilon+2} & \dots & v2_n \\ v3_1 & v3_2 & \dots & v3_\varepsilon & v3_{\varepsilon+2} & \dots & v3_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ vn_1 & vn_2 & \dots & vn_\varepsilon & vn_{\varepsilon+2} & \dots & vn_n \end{vmatrix}.$$

Considérons en effet le développement de

$$\begin{vmatrix} v2_2 + z \,.\, v2_1 & v2_3 + z \,.\, v2_2 & \dots & v2_n + z \,.\, v2_{n-1} \\ v3_2 + z \,.\, v3_1 & v3_3 + z \,.\, v3_2 & \dots & v3_n + z \,.\, v3_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ vn_2 + z \,.\, vn_1 & vn_3 + z \,.\, vn_2 & \dots & vn_n + z \,.\, vn_{n-1} \end{vmatrix};$$

le coefficient de z^ε est la somme des déterminants obtenus en prenant dans ε rangées (ou colonnes) le multiplicateur de z, et dans les rangées (ou colonnes) restantes, les termes indépendants de z. On trouve ainsi deux expressions différentes du coefficient de z^ε; en les identifiant, on obtient :

$$\sum{}' \Delta'' = \Delta_\varepsilon \,(*).$$

100. Reprenons maintenant la formule (10″); nous pourrons l'écrire :

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n] = \sum_{\varepsilon=0}^{n-1} (-1)^\varepsilon \left\} \pi_1 + \varepsilon, \pi_2, \dots, \pi_n \right\{_{\Delta_\varepsilon v1_1},$$

ou bien encore, d'après les relations générales (11) et (11′),

$$[\pi_1, \dots, \pi_n] = \left\} \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \right\{_{\sum (-1)^\varepsilon v1_{\varepsilon+1} \,.\, \Delta_\varepsilon}.$$

La somme

$$\sum_{\varepsilon=0}^{n-1} (-1)^\varepsilon v1_{\varepsilon+1} \,.\, \Delta_\varepsilon$$

(*) Cette égalité peut aussi se déduire d'une propriété des déterminants multiples, que nous avions obtenue comme généralisation d'un théorème établi par M. Le Paige, dans son Mémoire : *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques.* (Voir : *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège,* 2e série, t. IX.)

est égale au déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} v1_1 & v1_2 & \dots & v1_n \\ v2_1 & v2_2 & \dots & v2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ vn_1 & vn_2 & \dots & vn_n \end{vmatrix};$$

nous obtenons donc

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n] = \}\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\{_\Delta :$$

c'est la formule (12) que nous avions indiquée pour le nombre des semi-invariants linéairement indépendants, de poids π_1, π_2, ..., π_n et des degrés r, r_1, ... pour les formes f, f_1, ...

CHAPITRE VIII.

CONSIDÉRATIONS SUR LES PARTICULARITÉS ESSENTIELLES DES FORMES ALGÉBRIQUES.

Relation des particularités essentielles avec les covariants primaires.

101. Soient $f, f_1, \ldots$ des formes algébriques à une ou plusieurs séries de n variables; nous dirons que le système $f, f_1, \ldots$ a une *particularité essentielle*, s'il existe entre les coefficients de $f, f_1, \ldots$ des relations algébriques entières et homogènes

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \ldots, \tag{1}$$

qui ne sont pas altérées quand les formes $f, f_1, \ldots$ sont modifiées par une substitution linéaire quelconque des variables; on devra donc joindre aux relations (1) les équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \ldots, \tag{2}$$

$G_1, G_2, \ldots$ étant les transformées de $g_1, g_2, \ldots$

Chacune des fonctions g_i peut s'écrire $g_i = g_{i1} + g_{i2} + \cdots$ comme somme de fonctions isobariques. Soit G_1' la transformée de g_1, obtenue en effectuant successivement les substitutions définies par

$$x_i = \varepsilon_i X_i',$$

$$X_i' = \alpha_{i1} X_1 + \alpha_{i2} X_2 + \cdots + \alpha_{in} X_n,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

D'après l'équation $G_1 = 0$, relative à toute substitution linéaire, nous aurons

$$G'_1 = \varepsilon_1^{\pi'_1} \varepsilon_2^{\pi'_2} \dots \varepsilon_n^{\pi'_n} G_{11} + \varepsilon_1^{\pi''_1} \dots \varepsilon_n^{\pi''_n} G_{12} + \dots = 0,$$

en désignant par

$$\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_n; \pi''_1, \pi''_2, \dots \pi''_n, \dots$$

les poids de $g_{11}, g_{12}, \dots$

On obtient, par suite,

$$G_{11} = 0, \quad G_{12} = 0, \quad \dots,$$

et si l'on suppose

$$\alpha_{ii} = 1, \quad \alpha_{ij} = 0, \quad (i \gtrless j),$$

on trouve :

$$g_{11} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad \dots$$

Ainsi les équations $g_1 = 0$, $G_1 = 0$, ... peuvent être remplacées par

$$g_{11} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad \dots, \quad G_{11} = 0, \quad G_{12} = 0, \quad \dots$$

Il en résulte que *les équations* $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, ... *d'une particularité essentielle peuvent être supposées isobariques.*

102. Considérons pour un instant f, f_1, ... comme des formes dont les coefficients n'ont entre eux aucune relation ; les transformées G_1, G_2, ... des fonctions $g_1, g_2, \dots$, supposées isobariques, deviennent des fonctions invariantes $[G_1]$, $[G_2]$, ... si l'on remplace les paramètres α_{ij} de la substitution par les variables xj_i (§ 44). La fonction invariante $[G_1]$ est exprimable comme somme irréductible de covariants identiques, multipliés par des polaires de covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \dots, \chi t$; d'autre part, $\chi 1, \chi 2, \dots, \chi t$, multipliés par des covariants identiques, sont des polaires de $[G_1]$, relatives aux variables (§ 75). Pour la particularité essentielle définie par les équations (1), on a

$$G_1 = 0,$$

puis

$$[G_1] = 0, \quad \chi 1 = 0, \quad \chi 2 = 0, \quad \dots, \quad \chi t = 0.$$

La condition invariante $g_1 = 0$ peut donc être remplacée par

$$\chi^1 = 0, \quad \chi^2 = 0, \quad \ldots, \quad \chi^t = 0;$$

on obtient un résultat analogue pour les conditions $G_2 = 0$... Par conséquent, *toute particularité essentielle est définie par l'identification à zéro de certains covariants primaires des formes* f, f_1, ..., *considérées comme formes quelconques* (*).

Fonctions invariantes d'une particularité essentielle.

103. Soit φ une fonction algébrique entière et homogène des variables et des coefficients des formes $f, f_1, \ldots$ Supposons qu'au moyen des équations (1) et (2) d'une particularité essentielle, on puisse vérifier la relation

$$\Phi = \delta^\pi \cdot \varphi,$$

δ étant le module d'une substitution linéaire quelconque des variables, π étant un nombre entier positif, négatif ou nul : nous dirons que φ est *une fonction invariante de la particularité essentielle.*

Pour éviter toute ambiguïté, nous appellerons *régulières,* les fonctions invariantes des formes $f, f_1, \ldots$, supposées quelconques. Les fonctions invariantes régulières sont évidemment des fonctions invariantes de toute particularité. Mais il n'est pas certain *a priori* que toutes les fonctions invariantes d'une particularité peuvent se déduire des fonctions invariantes régulières. En effet, soit h une fonction homogène des variables et des coefficients des formes $f, f_1, \ldots$, considérées comme quelconques : nous écrirons

$$H = h\delta^\pi + \mathfrak{R},$$

(*) M. Gram a fait observer que toute particularité essentielle est définie par l'annulation des fonctions invariantes représentées actuellement par $[G_1]$, $[G_2]$, ... (*Mathematische Annalen,* t. VII).

en supposant que H contient les paramètres α_{ij} de la substitution au degré $n\pi$, π étant un nombre entier positif, négatif ou nul. Il peut arriver que la quantité $\mathfrak{R}$ soit différente de zéro quand $f, f_1, \ldots$ sont quelconques, mais que d'autre part on ait $\mathfrak{R} = 0$, d'après les équations (1) et (2).

Dans ces conditions, h est une fonction invariante de la particularité, sans être une fonction invariante régulière. Toutefois, il peut se faire que d'après les équations (1) et (2), la quantité h soit exprimable comme fonction invariante régulière h' de $f, f_1, \ldots$, et de telle manière que l'on ait

$$h = h' - h'',$$

h'' étant une quantité nulle d'après les équations (1) et (2); dans ce cas, la fonction invariante h de la particularité se déduit d'une fonction invariante régulière h'. Nous nous proposerons de résoudre la question suivante : *Peut-on obtenir, au moyen des fonctions invariantes régulières, toutes les fonctions invariantes d'une particularité?*

104. Pour notre but, nous aurons à faire usage d'une propriété des covariants primaires réguliers, rapportés à une particularité.

Désignons, comme précédemment, par la caractéristique Ω, une opération telle que $\Omega\mathcal{F}$ soit une somme homogène de covariants identiques, multipliés par des polaires de $\mathcal{F}$ relatives aux variables; nous pourrons énoncer le théorème suivant : *Si, pour une particularité, les covariants primaires réguliers* $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^t$ *sont linéairement indépendants et si l'on a dans les mêmes conditions*

$$\Omega_1\chi^1 + \Omega_2\chi^2 + \cdots + \Omega_t\chi^t = 0,$$

on a aussi

$$\Omega_1\chi^1 + \Omega_2\chi^2 + \cdots + \Omega_t\chi^t = 0,$$

dans le cas tout à fait général.

Supposons, en effet, que l'on ait dans le cas général

$$R = \Omega_1\chi^1 + \Omega_2\chi^2 + \cdots + \Omega_t\chi^t \gtrless 0.$$

Les covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ n'auront entre eux aucune relation du premier degré, puisqu'ils jouissent de cette propriété quand ils sont rapportés à la particularité. D'autre part, si les opérations $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_t$ ne sont pas linéairement indépendantes pour $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, on pourra écrire :

$$R = \Omega_1' \chi' 1 + \Omega_2' \chi' 2 + \cdots + \Omega_{t_1}' \chi_{t_1}', \tag{3}$$

en faisant les conventions suivantes : 1° $\chi_1', \chi_2', \ldots$ sont des covariants primaires linéairement indépendants, exprimables comme fonctions du premier degré de $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$; 2° les opérations $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_{t_1}'$ sont linéairement indépendantes pour $\chi' 1$, $\chi' 2, \ldots, \chi' t_1$ (voir § 74).

La fonction invariante R étant supposée différente de zéro, on déduit de l'équation (3) que les covariants primaires $\chi_1', \chi_2', \ldots$, multipliés par des puissances de $(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)$, sont des polaires de R relatives aux variables (§ 75). Rapportons ce résultat à la particularité pour laquelle on a $R = 0$; nous voyons que les fonctions χ', c'est-à-dire des combinaisons linéaires de $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$, devraient être nulles d'après les conditions de la particularité. Cette conséquence est contraire à nos suppositions; par suite, la fonction R doit être nulle dans le cas général, ainsi que nous l'avions annoncé.

105. Soit φ une fonction invariante quelconque d'une particularité essentielle; d'après la définition, on pourra vérifier la relation

$$\Phi = \delta^{\pi} . \varphi, \tag{4}$$

en faisant usage des équations de la particularité : nous pourrons toujours supposer que φ se rapporte à des séries de variables $y1, y2, \ldots$, différentes de $x1, x2, \ldots, xn$.

Désignons, comme précédemment, par $[\Phi]$ la transformée de φ, dans laquelle on a remplacé les paramètres $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ de la substitution, par les variables

$$x1_i, \quad x2_i, \quad \ldots, \quad xn_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

si la quantité φ contient au degré *total* ρ les variables $y1, y2, \ldots$, le produit

$$\varphi' = [\Phi] . (\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^\rho \tag{5}$$

est une fonction invariante régulière (§ 44).

D'après les équations (4) et (5), on a pour la particularité essentielle :

$$[\Phi] = \varphi . (\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^\pi,$$

puis

$$\varphi = \frac{\varphi'}{(\pm x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi+\rho}}; \tag{6}$$

la fonction φ étant indépendante de $x1, x2, \ldots, xn$, on a nécessairement $\pi + \rho \gtreqless 0$, et la fonction φ' est du degré $\pi + \rho$ par rapport à $x1, x2, \ldots, xn$.

106. Soit

$$\varphi' = \Omega_1 \chi 1 + \Omega_2 \chi 2 + \cdots + \Omega_t \chi t,$$

le développement de la fonction invariante régulière φ' suivant les polaires de covariants primaires $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$. Supposons que les covariants $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t$ sont des combinaisons linéaires de $\chi 1, \chi 2, \ldots, \chi t_1$ quand on les rapporte à la particularité essentielle; nous pourrons remplacer la dernière équation par

$$\varphi' = \varphi'' + \Omega_{11} \chi 1 + \Omega_{12} \chi 2 + \cdots + \Omega_{1t_1} \chi t_1, \tag{7}$$

en désignant par φ'' une fonction invariante qui s'annule pour la particularité.

D'après l'équation (6), la quantité φ' est divisible par

$$(\pm x1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi+\rho}$$

quand on la rapporte à la particularité; il en est de même de

$$\Omega_{11} \chi 1 + \Omega_{12} \chi 2 + \cdots + \Omega_{1t_1} \chi t_1,$$

d'après la formule (7).

Si l'on observe que φ' et $\Omega_{11}\chi 1 + \cdots$ contiennent au degré $\pi + \rho$ chacune des séries de variables $x1, x2, \ldots, xn$, on obtient

$$\left.\begin{array}{c} xi\dfrac{d}{dxi+1}\left(\Omega_{11}\chi 1 + \Omega_{12}\chi 2 + \cdots + \Omega_{1t_1}\chi t_1\right) = 0, \\ i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, \end{array}\right\} \quad (8)$$

pour la particularité essentielle.

Les opérations

$$xi\frac{d}{dxi+1}\Omega_{11}, \quad xi\frac{d}{dxi+1}\Omega_{12}, \quad \ldots,$$

sont comprises parmi celles qui ont été représentées par la caractéristique Ω; d'autre part, les covariants primaires $\chi 1$, $\chi 2, \ldots, \chi t_1$ n'ont entre eux aucune relation linéaire quand on les rapporte à la particularité essentielle : par l'application du théorème énoncé au paragraphe 104, on voit que les équations (8) ont encore lieu quand les covariants χ se rapportent à des formes algébriques sans particularité. Il résulte de là que

$$\Omega_{11}\chi 1 + \cdots + \Omega_{1t_1}\chi t_1,$$

c'est-à-dire $\varphi' - \varphi''$, est toujours divisible par

$$(\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi+\rho}$$

(voir § 42, Cor.); en d'autres termes,

$$\frac{\varphi' - \varphi''}{(\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi+\rho}}$$

est une fonction invariante régulière φ_1. Pour la particularité, on a $\varphi'' = 0$, et l'on peut écrire au lieu de l'équation (6) :

$$\varphi = \frac{\varphi' - \varphi''}{(\pm\, x1_1 x2_2 \ldots xn_n)^{\pi+\rho}} = \varphi_1.$$

Conséquemment, *toute fonction invariante φ d'une particularité essentielle se déduit d'une fonction invariante régulière φ_1.*

107. Nous appellerons *covariants primaires d'une particularité essentielle,* les fonctions invariantes φ de la particularité qui dépendent des seules variables $x1$, $x2$, ..., $xn - 1$ et qui satisfont aux équations

$$x1 \frac{d}{dx2} \varphi = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} \varphi = 0, \quad \ldots, \quad xn - 2 \frac{d}{dxn - 1} \varphi = 0.$$

Cela posé, nous établirons que *tous les covariants primaires d'une particularité essentielle se déduisent des covariants primaires réguliers.*

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle qui a été indiquée pour le dernier théorème.

Soit φ_1' une fonction invariante régulière dont on peut déduire le covariant primaire φ de la particularité essentielle; nous écrirons :

$$\varphi_1' = \varphi_1'' + \Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t, \tag{9}$$

en supposant que pour la particularité φ_1'' s'annule, et qu'en même temps les valeurs de $\chi 1$, $\chi 2$, ..., χt sont linéairement indépendantes.

D'après la définition du covariant φ, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{c} xi \dfrac{d}{dxi + 1} (\Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n - 2, \end{array}\right\} \tag{10}$$

pour la particularité à laquelle la fonction φ se rapporte.

Il résulte de là que l'équation (10) a lieu dans le cas tout à fait général (§ 104); par suite,

$$\Omega_1\chi 1 + \Omega_2\chi 2 + \cdots + \Omega_t\chi t$$

se réduit à un covariant primaire régulier χ (§ 62), et l'on a, d'après la formule (9) :

$$\varphi_1' = \varphi_1'' + \chi.$$

Les fonctions φ_1' et φ_1'', rapportées à la particularité, ont pour valeurs φ et 0 : conséquemment, *tout covariant primaire* φ *de la particularité invariante se déduit d'un covariant primaire régulier* χ.

Ainsi, par exemple, supposons que les formes $f, f_1, \ldots$ contiennent les seules variables $x1, x2, \ldots, xn-1$ et satisfont aux conditions invariantes

$$x1 \frac{d}{dx2} = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} = 0, \quad \ldots, \quad xn-2 \frac{d}{dxn-1} = 0;$$

les covariants primaires de $f, f_1, \ldots$ se déduisent des covariants primaires réguliers ; par suite, ils s'obtiennent au moyen de la méthode des covariants dérivés (§ 86).

ERRATA.

Page 5, ligne 3 ; au lieu de *exprimés,* lisez : *exprimées.*

— 11, dernière ligne ; au lieu de f, f', lisez : f', f''.

— 12, ligne 14 ; au lieu de f, lisez : f'.

— 12, — 15 ; — f_1, lisez : f'_1.

— 12, — 25 ; — a^v, lisez : a^u.

— 31, — 5 ; — *somme,* lisez : *sommes.*

— 32, formule (1) ; au lieu de Π_i, lisez : π_i.

— 100, dernière ligne, et page 101, première ligne ; la notation m doit être remplacée par m'.

LETTRES

A

QUELQUES MATHÉMATICIENS

PAR

E. CATALAN.

LETTRES

A

QUELQUES MATHÉMATICIENS.

I

A M. Hermite.

Merci de votre bonne lettre, si affectueuse et si encourageante. Je me permets de vous signaler, dans le tome III (*), la proposition suivante, *horriblement* simple, mais *peut-être* nouvelle :

Soit

$$(1 - x)^{-p} = S_n + R_n,$$

p *étant un nombre entier. Le reste* R_n = *la fonction proposée, multipliée par un polynôme entier,* facile à former.

A l'instant, je trouve cette autre relation :

$$\left[\frac{d^p \dfrac{1}{x(1+x)^{p+1}}}{dx^p}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}(-1)^p \Gamma(p+1),$$

qui me semble curieuse. Je me demande si, en admettant les différentielles à indices quelconques, de notre Maître Liouville, elle serait générale (**). Mais je n'ai pas le temps de chercher la solution de ce problème.

Salut *très* affectueux de votre *très* vieux Professeur.

Liége, 8 octobre 1888.

(*) *Mélanges mathématiques,* p. 251.

(**) *Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse,* p. 43.

II

A M. G. de Longchamps, Professeur au Lycée Charlemagne.

MON CHER LONGCHAMPS,

Je reçois ta lettre, dont je te remercie.

Avant que le Mémoire me revienne, je vais te dire l'impression qu'il m'a laissée, quand je l'ai rapidement parcouru.

Au fond, tes *nouvelles fonctions* sont des *séries*. J'accorde qu'elles sont convergentes. Sont-elles *nouvelles*, sont-elles plus simples que celles dont on a fait usage jusqu'à présent?

Là est la question.

Par exemple (si j'ai bonne mémoire), tu fais d'assez longs calculs pour développer, en série, la fonction

$$y = \int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Or,

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots$$

Donc

$$y = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.5} + \frac{x^7}{1.2.3.7} + \cdots$$

Ta série est-elle *plus simple* que celle-ci? J'en doute.

Ce n'est pas tout.

Tu crois qu'avec les *isobares* (*), tu intègres, *dans tous les cas, l'équation de Riccati*. Cette annonce m'avait, autrefois, fait dresser l'oreille, comme si j'étais un vieux cheval de trompette. A la lecture, je n'ai pas été converti. Ton intégrale, me semble-t-il, est un développement en série, $\pm$ conforme à ceux que l'on connaît, développements employés, en particulier, par Liouville, et reproduits dans le *Cours d'Analyse* de Duhamel. Insistons un peu sur ce point.

(*) Je ne chicane pas sur les mots nouveaux ; mais celui-ci, très conforme à l'étymologie, me semble un peu *barbare*. J'aimerais mieux...

Liouville transforme ainsi l'équation de Riccati :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right) y. \tag{1}$$

Soit, s'il est possible,

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots; \tag{2}$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} a\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + b\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} + c\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} + \cdots \\ = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)(ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

puis le calcul bien connu. Fais-tu autre chose? Surtout fais-tu *plus?* Je ne le crois pas; mais je désire me tromper (*). Du reste, De Tilly et Mansion sont d'excellents juges, très compétents, et très bien disposés pour toi. De leur part, tu n'as pas à redouter, comme de ***, un parti pris. A propos de ***, qui donc jugera son...? Quel drôle de livre!

Ton vieux Collègue et ami.

Liège, 10 mars 1889.

III

A. M. Hermite.

MON CHER MONSIEUR HERMITE,

En publiant, au commencement de l'année dernière, les *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n, je croyais bien ne plus m'occuper de ce sujet.

Mais l'on revient toujours
A ses premiers amours!

(*) *Je m'étais trompé :* M. de Longchamps remplace, par une série unique, le quotient de deux séries.

Au commencement de cette semaine, en étudiant votre savant *Cours de la Sorbonne* (ce que je n'avais pas encore fait : je me le reproche), je suis tombé sur la célèbre formule de Gauss :

$$\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1}{X_{n-1}X_n} \qquad (1) \qquad (x > 1)$$

Elle m'a fait songer à un rapprochement signalé en 1879, par suite de la comparaison avec cette autre formule :

$$\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\,X_{n-1}X_n, \qquad (2) \qquad (x < 1),$$

que je crois avoir trouvée dans ce temps-là. Mais ce rapprochement n'était que *typographique*, pour ainsi dire. On peut faire mieux.

En effet, soit, pour plus de clarté, $X_n = f_n(x)$. Dans la formule de Gauss, changeons x en $\frac{1}{z}$; nous aurons :

$$\mathcal{L}\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (1') \qquad (z < 1).$$

Donc, *par ma formule* (?) :

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}f_{n-1}(z)f_n(z); \qquad (A) \qquad (z < 1),$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}X_{n-1}X_n \qquad (A') \qquad (x < 1).$$

Si je ne me fais illusion, cette égalité (A′) est curieuse, et *doit avoir* des conséquences nombreuses.

Remplaçant $X_1, X_2, X_3, \ldots$ par leurs valeurs connues, on trouve, comme développement du premier membre :

$$x + \frac{2}{2}\frac{x^3}{3 - x^2} + \frac{4}{3}\frac{x^5}{(3 - x^2)(5 - x^2)} + \frac{16}{4}\frac{x^7}{(5 - 3x^2)(35 - 30x^2 + 3x^4)} + \cdots;$$

et, comme développement du second,

$$x + \frac{1}{4}x(3x^2 - 1) + \frac{1}{12}(3x^2 - 1)(5x^2 - 3x)$$
$$+ \frac{1}{84}(5x^3 - 3x)(35x^4 - 30x^2 + 3) + \cdots$$

De là résulte :

$$1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{12}, \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}(5 + 9) + \frac{1}{66}(25 - 90) - \cdots;$$

puis les sommes d'une infinité de séries, assez compliquées.

Je me borne, mon cher et illustre Collègue, à cette simple indication. Si vous pensez que le sujet mérite d'être creusé, envoyez-moi, par carte postale, ce seul mot : *Continuez.*

Salut affectueux.

Liège, 8 novembre 1889.

IV

A M. Hermite.

Mon cher Monsieur Hermite,

Voyez, encore une fois, *comme les beaux esprits se rencontrent !* Il y a deux jours, j'ai reçu, de M. Miller, les derniers numéros de l'*Educational Times*. Naturellement, mon attention s'est portée sur votre nom, et sur la Question 9832. Maintenant, écoutez le reste.

La série

$$x + x^2 + 2x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+3)\,..\,2n}{2.3\ldots n}x^{n+1} + \cdots$$

est, comme l'a remarqué Binet, le développement de

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}\ (^*).$$

A la page 62, j'ai donné la formule

$$(T_2x + T_3x^2 + T_4x^3 + \cdot\cdot)^k = x^k + \frac{k}{1}x^{k+1} + \frac{k(k+3)}{1.2}x^{k+2} + \cdots,$$

ou

$$(1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots)^k = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k(k+3)}{1.2}x^2 + \cdots$$

Le premier membre égale $\left(\frac{y}{x}\right)^k$.

Mais, à cause de

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2},$$

on a

$$1 - y = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2},$$

puis

$$y(1-y) = x.$$

Donc

$$\left(\frac{y}{x}\right)^k = (1-y)^{-k},$$

puis

$$(1-y)^{-k} = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k(k+3)}{1.2}x^2 + \cdots;$$

ce qui est votre formule.

Salut affectueux.

Liège, 31 mars 1890.

(*) *Mélanges mathématiques*, t. II, p. 65.

V

A M. Hermite.

Cher Monsieur Hermite,

Trois jours passés à Bruxelles m'ont empêché, jusqu'à présent, de répondre à votre lettre du 4 avril.

Et d'abord, je ne vous ai jamais, au grand jamais, *supposé* l'intention de m'adresser un reproche quelconque : bien au contraire ! Donc, laissons de côté ce petit point.

Je crois vous avoir mandé que, dans le Mémoire présenté, samedi, à l'Académie de Belgique, j'ai indiqué certaines propriétés dont jouissent vos polynômes T_n, ou, après un changement de lettres, vos intégrales.

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - A_n}{x - a}\, 2x,$$

(j'appelle A_n ce que devient X_n par le changement de x en a).

Je vous remercie de m'avoir fait connaître la belle formule

$$\sum_0^\infty \alpha_n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} = \mathcal{L}\frac{\alpha - a + \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{1 - a}. \tag{A}$$

En la comparant à la formule (79) de mon *deuxième Mémoire* (p. 26) (*), j'arrive à un résultat qui m'étonne un peu.

Pour rendre plus facile la comparaison, je change, dans (A), α en z, a en x :

$$\sum_0^\infty z^n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}\, \mathcal{L}\frac{z - x + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{1 - x}. \tag{A'}$$

(*)
$$\mathcal{L}\frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \tag{B}$$

Mais, J_n était une fonction de a; donc, dans (A′), on doit prendre

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - T_n}{x - t}\, dt,$$

afin que le *nouveau* J_n ne diffère, de l'*ancien*, que par le changement indiqué. Si je ne me trompe, le *nouveau* J_n est donc votre polynôme P_n. Ceci admis, (A′) devient

$$\sum_0^\infty P_n z^n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}\, \mathcal{L}\, \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x}; \qquad \text{(A″)}$$

ou, d'après (B) :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - 2xz + z^2} \sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1}. \qquad \text{(C)}$$

Prenons les dérivées des deux membres, par rapport à z :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-2xz+z^2} \sum_0^\infty n P_n z^{n-1} + \frac{1}{2} \frac{z - x}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n z^n;$$

ou, par l'*équation de définition* :

$$(1 - 2xz + z^2) \sum_0^\infty n P_n z^n + (z - x) \sum_0^\infty P_n z^n = 2.$$

Ainsi

$$\sum_0^\infty \left[n - (2n + 1)zx + (n + 1)z^2\right] P_n z^{n-1} = 2;$$

ou enfin, parce que $P_0 = 0$:

$$\sum_0^\infty \left[n - (2n + 1)zx + (n + 1)z^2\right] P_n z^{n-1} = 2. \qquad \text{(D)}$$

Voilà ce qui m'étonne. Ai-je commis des fautes, ou vous ai-je mal compris? L'avenir nous l'apprendra.

Agréez, je vous prie, avec mes remerciements, l'assurance des sentiments affectueux de

Votre bien dévoué *très Ancien.*

Liège, 16 avril 1890.

P. S. La formule (D) est *exacte;* elle s'accorde avec la relation entre P_{n+1}, P_n, P_{n-1} (*).

VI

A M. Allix, Capitaine du Génie (à Gap).

MON JEUNE CAMARADE,

Merci de votre aimable et intéressante lettre du 11. Si je n'y ai pas répondu immédiatement, c'est parce que, en ce moment, une bronchite me tient : je suis *agrémenté* d'un ......, sans compter d'autres mauvaises choses.

Vous me dites que ma *définition des incommensurables* soulève, chez vous, beaucoup d'objections (du moins, tel est le sens de vos paroles). Lorsque, vers 1836 ou 1837, je donnai cette définition, je ne me flattai point d'avoir, du premier coup, atteint la perfection. J'avais ouvert la voie : c'était assez pour commencer. Puis, je n'ai jamais écrit pour les *abstracteurs de quintescence;* car, comme dit Leibniz (?) : « Il n'y a pas moyen de contenter ceux qui demandent le pourquoi du pourquoi. » Comme je l'ai narré à Brisse, quand j'étais sur les bancs, on ne jurait que par *Bourdon :* « $\sqrt{7}$ est le nombre qui, *multiplié* par lui-même, reproduit 7. »

Il n'avait oublié qu'un point :
C'était d'éclairer sa lanterne.

(*) Cette relation est

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Pour la Géométrie, c'était encore pis. Legendre, dans sa mauvaise Géométrie (renouvelée d'Euclide), dit, en termes presque aussi solennels que barbares : « Je dis qu'on aura *surface* CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ* CA (*) ». Puis il ajoute :

« Car si $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ* CA n'est pas l'aire du cercle dont CA est » le rayon, cette quantité sera la mesure d'un cercle plus grand » ou plus petit. » Pourquoi? Il a oublié de le dire.

En d'autres termes, l'illustre Auteur de la *Théorie des fonctions elliptiques* admet qu'il y a des cercles de toutes les grandeurs ; ou encore, que, *l'aire du cercle est une fonction continue du rayon.*

Si l'on admet cela, que reste-t-il à faire? Rien, ou très peu de chose.

Ce qui m'a toujours mis de mauvaise humeur, quand j'étudiais la *Géométrie* de Legendre, c'est l'espèce de mauvaise foi de l'Auteur. En effet, avec ses démonstrations bizarres (qui ne démontrent pas), il a l'air de dire, au malheureux lecteur : « Voyez comme je suis rigoureux! » Et il ne l'est pas plus que Bezout, lequel avait, du moins, le mérite de la clarté.

Je pourrais continuer cette critique : le sujet est presque inépuisable. Pour abréger, je vous citerai seulement le fameux *Lemme préliminaire sur les surfaces* (p. 242).

Que signifie l'expression : « *Une surface convexe est moindre que* » ?

Quoi qu'il en soit, dans mes *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai défini la *longueur d'une ligne*, l'*aire d'une surface*, le *volume d'un corps*. Il faut croire que mes définitions n'étaient pas mauvaises, car elles ont été adoptées par mes *successeurs*, en particulier par MM. Y et Z, ..., qui, dans leur grosse *Géométrie*, se sont emparés (ou parés) de toutes mes idées, sans jamais me citer.

Ici, j'ouvre une petite parenthèse.

Dans mon volume de 1843, je disais (p. 135) :

« En employant des rectangles, ..., et en employant des poly-

(*) Cet énoncé, et tous ceux du même genre, faisaient dire à Lacroix (d'après ce qu'on m'a rapporté) : « Il y a donc un ange qui lui a *soufflé* son théorème ! »

» gones, ... arrivera-t-on à la même limite? Et même, en conser-
» vant le second procédé, toutes ces séries conduiront-elles à la
» même limite? La réponse est affirmative; mais la démonstra-
» tion de l'identité des résultats ne paraît pas être du ressort des
» Éléments (*). Nous admettrons donc cette identité. »

Vous voyez que ceci est de la *bonne foi scientifique*. Il paraît, d'après Y et Z, que *** a complété, en ce point, ma théorie. J'en suis bien aise.

Si le Docteur me permet de sortir aujourd'hui, je mettrai à la Poste les Mémoires que vous m'avez demandés. Je désire que vous puissiez avoir la patience de les lire, et la bonne fortune d'y ajouter quelque chose.

Que mettriez-vous à la place du mot *indéfini?* Il s'agit d'une chose qui ne finit pas. Je crains que vous en disiez autant de ma lettre. Donc, je termine brusquement.

Votre bien dévoué très Ancien.

Liège, 17 mai 1890.

VII

A. M. Casorati (**) (à Pavie).

MONSIEUR,

Je quittais Liège, quand j'ai reçu le beau Mémoire que vous m'avez fait l'honneur et le plaisir de m'offrir. Cette circonstance de déplacement vous explique le retard de ma réponse.

J'ai lu votre Mémoire avec le plus vif intérêt, et j'ai admiré la manière simple et élégante dont vous établissez votre jolie formule :

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

(*) Allusion aux Lemmes sur les infiniment petits.

(**) Cette lettre n'est point parvenue à destination. Le savant Professeur est mort avant d'avoir pu en prendre connaissance. Ces détails m'ont été communiqués par M^lle Eugénie Casorati, fille de mon regretté Collègue.

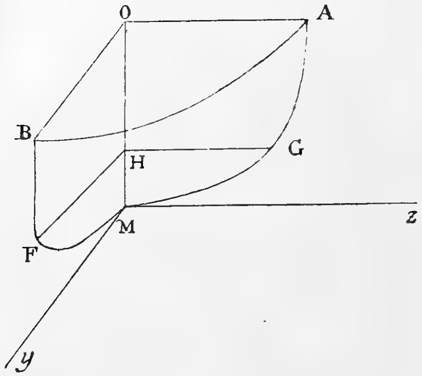
Atteint-elle le but que vous vous étiez proposé? Est-elle d'accord avec l'*idée commune?* Il me paraît que non. Voici l'un des motifs de mes doutes.

R_1 étant supposé positif, C ne change pas quand on y remplace R_2 par $-R_2$. En particulier, si l'on considère le *caténoïde,* dans lequel $R_2 = -R_1$, puis la sphère dont le rayon serait R_1, on a, pour ces deux surfaces, en deux points correspondants, $C = \frac{1}{R_1^2}$. Ainsi, *le caténoïde et la sphère auraient même courbure.* Cette conclusion est-elle d'accord avec « *l'idée commune* »? Je vous le demande.

Autrefois, je me suis occupé de cette question de la *courbure des surfaces,* question sur laquelle je n'ai rien publié. Depuis la lecture de votre Mémoire, mes *vieilles idées* sont revenues; et voici la solution (provisoire) qui en découle.

Coupons un ellipsoïde AMB (*), par un plan GHF, parallèle au plan tangent en M.

Soient λ la distance de ces plans, et E l'aire de la calotte *ellipsoïdique.* D'autre part, considérons la sphère qui aurait O pour centre, et $OM = c$ pour rayon. Soit S l'aire de la calotte *sphérique,*



correspondant à la calotte *ellipsoïdique.* Il me semble qu'on pourrait prendre, comme valeur de la courbure en M, la *limite* de $\frac{E}{S}$, répondant à $\lambda = 0$. Il est vrai que l'expression de E

(*) Ce sera l'ellipsoïde osculateur, si la surface donnée est convexe.

contient des intégrales elliptiques (*). Mais si l'on développe cette expression suivant les puissances de λ, et qu'ensuite on fasse $\lambda = 0$ $\left(\text{dans } \frac{E}{S}\right)$, *il est possible* que le résultat soit simple. N'ayant ici aucun livre, je ne puis effectuer ce calcul. Je me contente de vous en indiquer le principe, me proposant d'y revenir, *peut-être*. (Je suis dans mon 77[ième] *printemps.*)

Agréez, Monsieur, etc.

Spa, 17 juin 1890.

VIII

A M. Azzarelli (à Rome).

Monsieur,

Le dernier numéro des *Atti*, que j'ai reçu hier, contient une Note sur la *courbe formée par les projections d'un point sur les tangentes à un cercle,* Note au sujet de laquelle je désire vous soumettre quelques remarques.

La courbe dont il s'agit est la *podaire du cercle :* dans un cas particulier, elle se réduit au *Limaçon de Pascal.* Cette courbe, *archi-connue,* même par les Aspirants à nos Écoles (de France), ne mérite pas, me semble-t-il, d'être traitée dans un Recueil académique. L'Auteur de la Note y déploie un bien inutile luxe de calcul; et, véritablement, *il a pris une massue pour écraser une mouche!* (proverbe français). Vous allez en juger, si ce n'est déjà chose faite.

C étant le point donné, soit MP une tangente au cercle AB. Si l'on fait :

$$CO = b, \qquad OB = a, \qquad CP = u;$$

et que l'on mène OD parallèle à MP, on a

$$u = a + b\cos\omega, \tag{1}$$

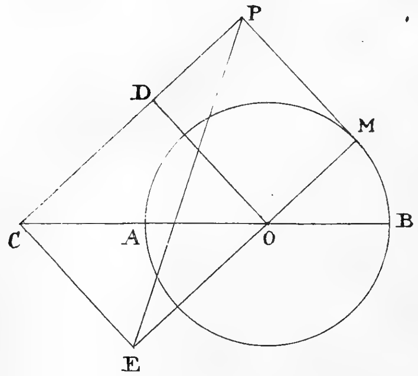
(*) Voir, dans le *Journal de Liouville,* mon Mémoire sur *l'aire de l'ellipsoïde,* etc.

équation de la podaire. On en conclut :

$$u' = -b \sin \omega, \tag{2}$$

$$u'' = -b \cos \omega \tag{3}$$

Si l'on achève le rectangle MPCE, la diagonale PE est la normale, en P, à la podaire (*).



La formule

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\omega^2$$

devient

$$ds^2 = (a^2 + 2ab \cos \omega + b^2)\, d\omega^2;$$

puis, si l'on fait $\omega = 2\theta$:

$$ds^2 = 4\,(a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \sin^2 \theta)\, d\theta^2. \tag{4}$$

Il résulte, de celle-ci :

$$s = 2\,(a + b) \int d\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(q + b)^2} \sin^2 \theta}. \tag{5}$$

Donc *l'arc* BP, *de la podaire, est équivalent à l'arc d'une ellipse facile à construire;* etc.

Je pense qu'en voilà assez...

Je suis, Monsieur, votre dévoué vieux Confrère.

Spa, 26 juillet 1890.

(*) Propriété connue, presque évidente. Le lieu du point E est la circonférence décrite sur CO comme diamètre.

IX

A M. Tallqvist (à Helsingfors).

Comment, Monsieur, vous avez déjà publié une demi-douzaine de Mémoires, sur un sujet *très difficile,* et vous n'avez que *vingt ans!*

> Vos pareils, à deux fois, ne se font pas connaître,
> Et, pour leurs coups d'essais, *font de grands* coups de maître,

comme dirait Corneille (ou à peu près). Permettez à un vieux Mathématicien, qui s'est occupé, il y a *quarante-six ans,* des *surfaces-minima;* permettez-lui, dis-je, non seulement de vous témoigner toute sa sympathie, mais encore la surprise de trouver tant de talent chez un tout jeune homme! Abel, votre illustre *quasi*-compatriote, avait plus de vingt ans quand il a commencé à devenir célèbre. Puissiez-vous, plus heureux que lui, poursuivre une longue carrière, si brillamment inaugurée!

J'ai lu, avec un vif plaisir, votre *détermination expérimentale...,* et j'en ai écrit déjà à un Confrère, M. Van der Mensbrugge, gendre et continuateur de Plateau. Je ne puis lire vos autres Mémoires, faute de connaître les langues dans lesquelles ils sont écrits.

Il me semble que vous ne citez pas le travail, bien remarquable, de *Ribaucour,* sur les *élassoïdes* (c'est le nom qu'il a imaginé; il est plus court que *surface-minima.* De plus, celui-ci est moitié français, moitié latin : il est *hybride*).

Ne connaissez-vous pas le Mémoire de Ribaucour, ou le Rapport que j'ai fait sur ce Mémoire? L'Auteur a obtenu, en 1880 ou 1881, le prix proposé par l'Académie de Belgique. Je regrette de ne pouvoir vous envoyer aucun de ces deux opuscules.

Je croyais la dénomination de *caténoïde* due à Bour, profond Géomètre, mort très jeune, et que j'ai beaucoup connu.

A propos des *élassoïdes,* voici une autre hypothèse que j'ai exposée, jadis, à l'Université de Liège : « *Tout élassoïde peut* *être engendré, de deux manières, par des courbes égales.* » Cette hypothèse est-elle fondée? Est-ce que M. Lie, dont je ne connais pas les ouvrages (à cause de la langue), n'a pas démontré quelque chose de ce genre?

Je termine cette lettre, déjà trop longue. A la fin des vacances, je me ferai traduire ceux de vos Mémoires qui ne sont pas en français. J'ai la persuasion qu'ils ne modifieront pas la bonne opinion que j'ai conçue de vous.

Agréez,......

Liège, 6 septembre 1890.

X

A M. l'Abbé Gelin (à Huy).

MON CHER COLLÈGUE,

Votre formule *supposée* :

$$\left.\begin{aligned} &1\,(+a)(1+ab)(1+ab^2)\dots(1+ab^{n-1}) \\ &= 1 + a\frac{1-b^n}{1-b} + a^2\frac{(1-b^n)(b-b^n)}{(1-b)(1-b^2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

est fort intéressante (elle m'a donné de la tablature et des insomnies). Mais elle n'est pas *nouvelle*. En septembre 1843, Cauchy a *démontré* celle-ci, qui ne diffère pas de la vôtre :

$$\left.\begin{aligned} (+x)(1+tx)\dots(1+t^{n-1}x) &= 1 + \frac{1-t^n}{1-t}x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)}tx^2 + \cdots \\ &+ \frac{(1-t^n)}{1-t}t^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}x^{n-1} + t^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(*Comptes rendus*, p. 560.)

Le grand Géomètre n'écrit pas le terme général du second membre : il est clair que ce terme est

$$T_p = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\dots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t_p)}t^{\frac{p(p-1)}{2}}x_p. \qquad (3)$$

Ainsi :

$$(1 + x)(1 + tx) \dots (1 + t^{n-1}x) = 1 + \sum_{p=1}^{p=n} T_p \qquad (4)$$

Remarques. — 1° D'après la forme du premier membre de l'égalité (2), T_p *est un polynôme entier, à coefficients entiers.*

2° Conséquemment, la fraction contenue dans T_p est réductible à un semblable polynôme; ou, ce qui est équivalent (avec un changement de lettres) :

$$\frac{(1 - x^n)(1 - x^{n-1}) \dots (1 - x^{k+p-1})}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots (1 - x^p)} = entier.$$

3° Ce théorème, qui me paraît fort remarquable, n'est pas nouveau non plus : il est énoncé et démontré dans l'*Algèbre* de Bertrand (1[re] édition). Il en résulte ces deux-ci :

Parmi les racines de l'équation

$$(x^n - 1)(x^{n+1} - 1) \dots (x^{n+p-1} - 1) = 0$$

se trouvent toutes celles de l'équation

$$(x - 1)(x^2 - 1) \dots (x^p - 1) = 0;$$

Si N *est un nombre entier, la fraction*

$$\frac{(N^n - 1)(N^{n+1} - 1) \dots (N^{n+p-1} - 1)}{(N - 1)(N^2 - 1) \dots (N^p - 1)}$$

est réductible à un nombre entier.

4° Si l'on suppose $x = 1$, $n = \infty$, et qu'on remplace t par q ($q < 1$), l'égalité (2) devient

$$\left.\begin{aligned} &2(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4) \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

laquelle est due, je crois, à Jacobi.

5° Posons, comme Jacobi et Legendre :

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots \\ \beta' &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots \end{aligned}\right\}(^*). \qquad (6)$$

On sait que

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \; (^{**}) \quad (7)$$

L'égalité (5) est la même chose que

$$2\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \quad (8)$$

Celle-ci paraît différer de la précédente. Cependant, elle en est une conséquence.

En effet, la soustraction donne

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \cdots \qquad (7)$$

Permettez-moi d'en rester là.

Liège, 5 juin 1891.

XI

A M. l'Abbé Gelin.

I

La formule de Cauchy (*C. R.*, sept. 1843) se trouve, au moins en germe, dans l'*Introduction à l'Analyse* d'Euler. Seulement, le grand Helvétien y considère le produit indéfini

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)\ldots$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 1.

(**) *Ibid.*, p. 51.

Il obtient, très simplement (comme toujours) :

$$Z=1+\frac{x}{1-x}z+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\cdots$$

C'est ce que vous aviez cherché. Ainsi que je vous le mandais dans ma lettre du 5 juin, si l'on suppose $z=1$, $x=q<1$, on a cette formule de Jacobi (?) :

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots$$

II

Je reprends la formule de Cauchy :

$$(1+x)(1+tx)\ldots(1+t^{n-1}x)=1+\sum_{p=1}^{p=n}T_p, \tag{1}$$

dans laquelle

$$T_p=\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)}t^{\frac{p(p-1)}{2}}x^p. \tag{2}$$

Évidemment, T_p *est la somme des produits*, p *à* p, *des* n *quantités*

$$x,\quad tx,\quad t^2x,\quad \ldots,\quad t^{n-1}x.$$

Soient, par exemple,

$$n=5,\quad p=2.$$

On a

$$T^2=\frac{(1-t^5)(1-t^4)}{(1-t)(1-t^2)}tx^2;$$

et aussi :

$$T_2=x^2\left[t+t^2+t^3+t^4+t^3+t^4+t^5+t^5+t^6+c^7\right]$$

$$=x^2\left[t+t^2+2t^3+2t^4+2t^5+t^6+t^6+t^3\right].$$

Conséquemment,

$$\frac{(1-t^5)(1-t^4)}{(1-t)(1-t^2)} = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + t^6,$$

ou

$$(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 + t^2) = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + t^6;$$

ce qui est exact.

III

Les questions précédentes m'ont conduit (ou ramené) à ces deux problèmes :

1° *On prend* p *termes, dans la suite* 1, 2, 3, .., n. *On fait la somme de ces* p *nombres. A quoi est égale la somme* $S_{n,p}$ *de toutes les sommes partielles?*

2° *Trouver les sommes* $X_{n,p}$ *des produits,* p *à* p, *des* n *premiers nombres entiers?*

J'obtiens :

1° $$S_{n,p} = C_{p+1,2} \times C_{n+1,p+1};$$

2° $$X_{n,3} = C_{n+1,4} \times C_{n+1,2}.$$

Cette seconde formule est d'autant plus remarquable qu'elle est, pour ainsi dire, *isolée :* les expressions de $X_{n,2}$ et de $X_{n,4}$ sont beaucoup plus compliquées.

Remarques. — 1° *Si* n *est premier, supérieur à* 4, $X_{n,3}$ est divisible par n^2.

2° *Si* n + 1 *est premier,* $X_{n,3}$ *est divisible* par $(n + 1)^2$.

3° Il y a une relation entre les deux problèmes.

Votre dévoué vieux Collègue,

E. C.

Liège, 17 juin 1891.

SUR

DE NOUVELLES FORMULES

POUR LE CALCUL

DU NOMBRE Π DE LAISANT;

PAR

le Dr F. J. STUDNIČKA,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PRAGUE.

SUR

DE NOUVELLES FORMULES

POUR LE CALCUL

DU NOMBRE Π DE LAISANT.

Dans mon Mémoire *Sur l'analogue du nombre* Π (*), j'ai pris comme argument du sinus hyperbolique dont la valeur est 1, le nombre $\frac{1}{2}\Pi$; je me propose actuellement de faire connaître de nouvelles formules qui se prêtent à une détermination commode de cette constante introduite par M. Laisant.

Dans son *Essai sur les fonctions hyperboliques* (**), cet auteur en a déterminé la valeur par la formule

$$\Pi = l(1 + \sqrt{2}), \qquad (1)$$

et, *en le calculant directement par les tables de logarithmes*, au moyen de la valeur approchée

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\,1356\ldots,$$

il a trouvé, avec six décimales,

$$\frac{1}{2}\Pi = 0{,}8813735870.$$

(*) *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2e série, t. XIV.

(**) Paris, Gauthier-Villars, 1874, p. 22.

Dans la suite de ses recherches (*), il a donné, en s'appuyant sur la formule

$$u = th\,.\,u + \frac{1}{3}\,th^3\,.\,u + \frac{1}{5}\,th^5\,.\,u + \cdots$$

la valeur de Π à l'aide d'une série :

$$\Pi\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3\,.\,2} + \frac{1}{5\,.\,2^2} + \frac{1}{7\,.\,2^3} + \cdots, \tag{2}$$

qui se déduit aussi directement de (1) lorsque l'on fait usage de l'identité

$$l(1 + \sqrt{2}) = l\,.\,\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{(**)}.$$

Afin de remplacer les égalités (1) et (2) par des formules qui permettent d'atteindre le but qu'on se propose d'une manière plus rapide, on peut recourir, soit à des développements en séries plus convergents, soit à des fractions continues. C'est l'objet du présent travail.

I. — Si l'on emploie la formule connue

$$l\,.\,x = \frac{1}{2}\,l(x - 1) + \frac{1}{2}\,l(x + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + 1}\,\frac{1}{(2x^2 - 1)^{2k+1}},$$

(*) Il la déduit de la formule plus connue :

$$u = \operatorname{tg}\,.\,u - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\,.\,u + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\,.\,x - \cdots$$

par de simples substitutions; elle se déduit d'ailleurs immédiatement, par inversion, de la formule aréométrique

$$\mathrm{A\,.\,T}(u) = \frac{1}{2}\,l\,.\,\frac{1 + u}{1 - u}.$$

(**) On se rend compte de la lenteur avec laquelle converge cette série, en observant que si l'on emploie les 10, 20, 30, 40, 50, ... premiers termes, on obtient, par Π, 4, 7, 11, 14, 18, ... décimales exactes.

et que, en ayant égard à (1), on fasse

$$x = 1 + \sqrt{2},$$

d'où l'on déduit

$$x - 1 = \sqrt{2}, \quad x + 1 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}), \quad 2x^2 - 1 = 5 + 4\sqrt{2};$$

on obtient immédiatement, après de courtes réductions,

$$l(1 + \sqrt{2}) = l\,.\,2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{1}{(5 + 4\sqrt{2})^{2k+1}};$$

ou, en introduisant Π

$$\Pi = 2l2 + 4\left[\frac{1}{5 + 4\sqrt{2}} + \frac{1}{3(5 + 4\sqrt{2})^3} + \frac{1}{5(5 + 4\sqrt{2})^5} + \cdots\right]. \quad (5)$$

Comme on a, avec une grande approximation,

$$5 + 4\sqrt{2} = 10.656\,854\,249\,492\ldots,$$

la série converge rapidement.

Ainsi les cinq premiers termes donnent

$$\Pi = 1{,}762\,747\,174\,016,$$

dont les dix premières décimales sont exactes.

II. — Pour obtenir un développement en fraction continue convenable, observons que

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}},$$

D'après la formule (27) du Mémoire cité dans mon introduction, la fonction continue a la valeur :

$$\frac{1}{2} \overset{*}{+} = \frac{2^{n-1} + (n-2)_1 2^{n-3} + (n-3)_2 2^{n-5} + \cdots}{2^n + (n-1)_1 2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} + \cdots};$$

Par suite, on a :

$$2 + \frac{1}{2} + \overset{*}{} = \frac{2^{n+1} + (n)_1 2^{n-1} + (n-1)_2 2^{n-3} + \cdots}{2^n + (n-1)_1 2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} + \cdots}.$$

Si l'on désigne simplement par Π_n la n^e réduite de Π, on trouve :

$$\Pi_n = 2l \,.\, \frac{2^{n+1} + (n)_1 2^{n-1} + (n-1)_2 2^{n-3} + \cdots}{2_n + (n-1)_1 2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} + \cdots}. \tag{4}$$

Il n'est pas nécessaire de montrer que cette valeur se calcule aisément, par le procédé connu, au moyen des réduites précédentes.

On a ainsi le tableau :

$$\left|\frac{2}{5}\right|\frac{2}{12}\left|\frac{2}{29}\right|\frac{2}{70}\left|\frac{2}{169}\right|\frac{2}{408}\left|\frac{2}{985}\right|\frac{2}{2378}\left|\frac{\cdots}{}\right.$$

$$\left|\frac{5}{2}\right|\frac{12}{5}\left|\frac{29}{12}\right|\frac{70}{29}\left|\frac{169}{70}\right|\frac{408}{169}\left|\frac{985}{408}\right|\frac{2378}{985}\left|\cdots\right.$$

En s'arrêtant au 20^e rang, on trouve la fraction

$$\frac{95\,222\,358}{38\,615\,965}.$$

Lorsque l'on fait $n = 8$, on trouve

$$\Pi_8 = 2[l\,.\,2378 - l\,.\,985] = 1.762\,747$$

où les six décimales sont exactes (*).

Par ce second procédé, où les logarithmes naturels interviennent, l'approximation est encore plus rapide.

(*) D'après mon calcul, on trouve, avec vingt décimales exactes :

$$\Pi = 1{,}762\,747\,174\,039\,086\,046\,91\ldots$$

Remarque. — On pourrait également, en faisant usage de l'identité déjà citée, poser

$$\Pi = l\,.\,2 + 2l\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{5}$$

puis, par la méthode d'Euler (*), transformer la série

$$l\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2\sqrt{2}} - \frac{1}{4.4} + \cdots, \tag{6}$$

en une série plus rapidement convergente.

On a ici, pour la n^e différence

$$\Delta^n u_k = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}}\left[\frac{2^{\frac{n}{2}}}{k} - (n)_1 \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{k+1} + (n)_2 \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{k+2} - \cdots \pm \frac{1}{k+n}\right].$$

Mais on n'arrive pas à une formule plus convenable en pratique; au contraire, en faisant la somme des termes de la nouvelle série, on retombe sur la série (6).

(*) Si l'on pose

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots,$$

et si l'on pose :

$$\Delta^{i+1} u_{k-1} = \Delta^i u_{k-1} - \Delta^i u_k,$$

on a

$$S = \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 u_1}{2^3} + \cdots,$$

comme on le démontre facilement à l'aide du calcul des opérations.